

Thèse présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité :
MECANIQUE

par

Andrei CONSTANTINESCU

Sur l'identification des modules élastiques

soutenue le 13 juin 1994 devant le jury composé de :

M. P.LADEVEZE	Président
M. G.MAUGIN	Rapporteur
M. R.OHAYON	Rapporteur
M. H.D.BUI	Examineur
M. P.PONTE-CASTANEDA	Examineur

Table des matières

1	Problème d'identification	9
1.1	Le problème mathématique	9
1.2	Questions importantes et résultats existants	11
1.3	Caractérisations de l'application DN	15
1.3.1	Les applications Energie et DN	16
1.3.2	Formules de réciprocité	17
1.3.3	Propriétés de monotonie	19
1.4	Application de DN et vibrations libres	22
1.5	Résultats d'unicité et de stabilité	23
1.5.1	Perte d'unicité dans l'élasticité anisotrope	23
1.5.2	Discussion des résultats d'unicité	26
1.6	Résultats de stabilité	29
1.6.1	Exemples 1D	30
1.6.2	Equation de Fredholm	33
1.7	Sélection des charges à appliquer	35
1.8	Conclusion	37
2	La Méthode de résolution	39
2.1	Le problème pratique de minimisation	39
2.2	L'erreur en loi de comportement	41
2.2.1	Elasticité isotrope	45
2.2.2	Elasticité anisotrope	46
2.2.3	Quelques remarques sur les propriétés mathématiques de ELC	47
2.3	Algorithmes de minimisation	49
2.3.1	Limitations de la méthode de reconstruction	51
2.4	Modèle analytique 1-D	51
2.4.1	Solutions analytiques aux problèmes directs	51
2.4.2	Problème d'identification	53
2.5	Conclusions	55

3	Exemples numériques	57
3.1	Description des test numériques	57
3.2	Résultats - Elasticité isotrope	61
3.3	Résultats - Elasticité à symétrie cubique	64
3.4	Comparaison avec le problème électrique	86
3.5	Conclusion	87
A	Annexes	90
A.1	Tenseurs et modules élastiques propres	91
A.2	Analyse spectrale et fonction de Green	95
A.3	Sur l'identification des fissures	98
A.4	Erreurs des calculs de reconstruction	100
B	Mesure des contraintes résiduelles	108
B.1	Mesures non destructives	109
B.1.1	Etat de contrainte résiduelle	110
B.1.2	Equation élastique linéaire	111
B.1.3	Problème d'identification des contraintes résiduelles	114
B.1.4	Méthode de l'état adjoint	117
B.2	Reconstruction des mesures des contraintes par rayons X	120
B.2.1	Introduction	120
B.2.2	Généralités sur le problème - Exemples	121
B.2.3	Redistribution des contraintes - I	122
B.2.4	Redistribution des contraintes - II	125
B.2.5	Redistribution des contraintes - III	126
B.2.6	Reconstruction de la boule	127
B.2.7	Reconstruction dans le cas du demi-espace	129
B.2.8	Problème bidimensionnel	130
B.2.9	Le problème tridimensionnel	132
B.2.10	Géométrie arbitraire	138
B.2.11	Brève description d'un algorithme de résolution numérique	140
B.2.12	Conclusion	141
B.2.13	Inclusion plastique dans un demi-espace	141

Présentation générale

Le comportement mécanique des structures est gouverné par 3 différents types d'équations. Deux d'entre eux sont des lois universelles de la nature ne dépendant pas de la nature physique du matériau : les équations de la dynamique et de la cinématique des milieu continus. La troisième caractérise la nature physique de la structure étudiée : la loi de comportement.

Les deux premiers groupes d'équations étant donnés, un des problèmes en mécanique est l'identification de la loi de comportement d'une structure. Ceci se passe généralement en deux étapes : dans un premier temps on choisit la nature du comportement : élastique linéaire ou non linéaire, élasto-plastique, visqueux, etc., puis dans un deuxième temps on détermine les coefficients intervenant dans les équations. Dans la plupart des cas on considère des matériaux homogènes et donc les coefficients sont constants ce qui rend les méthodes classiques inutilisables dans le cas des matériaux inhomogènes. Prenons comme exemple l'identification d'une loi de comportement élastique linéaire. Un essai de traction fournit rapidement un module d'élasticité. Il s'agit d'un module moyen. Dans le cas des éprouvettes inhomogènes, on peut être amené à vouloir déterminer la distribution des modules élastiques. Dans ce cas, aucune expérience ne permettant d'accéder à une mesure directe, il nous faut déterminer les propriétés d'un système, par des procédés généralement non destructifs, à partir des réponses de ce système lorsqu'il est soumis à des sollicitations connues.

L'étude présentée dans ce mémoire se situe en élasto-statique et l'on s'est proposé de déterminer la distribution intérieure des modules élastiques à partir des mesures simultanées des forces et des déplacements sur la frontière.

Le premier chapitre présente le problème d'identification des modules élastiques. D'un point de vue mathématique il s'agit de déterminer la distribution intérieure des coefficients d'une équation elliptique à partir des conditions aux limites Dirichlet et Neumann imposées simultanément sur la frontière. La connaissance de toutes conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann permet la définition de l'application Dirichlet-Neumann (DN), qui associe à chaque condition Dirichlet la condition Neumann correspondante. La formulation mathématique conduit naturellement à une

comparaison avec le problème d'identification électrique, dans lequel la distribution intérieure du coefficient de conductivité électrique est déterminé à partir des mesures de potentiel et de flux sur la frontière. Ce problème a reçu récemment une large attention tant du point de vue théorique qu'expérimental. Les questions traitées dans le cas électrique nous ont guidée dans l'étude du problème élastique.

Comme dans le cas électrique on a obtenu l'équivalence de l'application DN avec l'application "Energie de déformation" ainsi que son expression utilisant la fonction de Green du domaine ou les modes et les fréquences propres de vibration. Cette dernière relation entre l'application DN et les modes propres de vibration a une signification particulière car elle met en correspondance le problème d'identification élastique traité ici avec le problème spectrale inverse ¹. Cette correspondance permet par exemple de transférer les résultats d'unicité obtenus d'un problème à l'autre.

En ce qui concerne les résultats d'unicité de la solution du problème d'identification plusieurs questions restent ouvertes. A l'aide d'un exemple on a démontré que dans le cas de l'élasticité anisotrope on peut pas avoir une identification complète, la conjecture naturelle étant que les modules élastiques sont déterminés à un difféomorphisme près. Une conjecture plus précise a été formulée, mais ces conjectures sont à démontrer.

D'un point de vue stabilité, on a mis en évidence le fait que le problème d'identification est mal posé, ce qui signifie que des petites perturbations dans les données peuvent donner de grandes perturbations dans les modules reconstruits.

Dans l'étude numérique du problème d'identification on s'est intéressé surtout aux propriétés de l'application DN, qui ont mises en évidence la structure mathématique du problème. L'utilisation explicite de cette application lors d'une reconstruction conduit naturellement à l'inversion de la transformée de Fourier spatiale, or il est bien connue que celle-ci est sensible aux erreurs numériques. C'est pourquoi on s'est dirigé dans la résolution numérique du problème vers une solution variationnelle. La méthode proposée dans le deuxième chapitre est fondée sur la minimisation de l'erreur en loi de comportement sur l'ensemble des champs cinématiquement et statiquement admissibles.

Le concept d'erreur en loi de comportement a été introduit en élasticité par Ladevèze et Leguillon [47] pour donner une expression de l'erreur lors des calculs en éléments finis. Ensuite l'erreur en loi de comportement a été utilisée par Ladevèze et al. [48] pour le recalage des matrices de masse et de rigidité dans les modèles d'éléments finis lors des expériences de vibration. Dans le cas électrique l'erreur en loi de comportement a été étudiée d'un point de vue mathématique par Kohn et Vogelius [43] et d'un point de vue numérique par Kohn et McKenney [39].

Une des propriétés les plus importantes de l'erreur en loi de comportement est la localisation spatiale de l'erreur. Pour pouvoir utiliser cette propriété à l'iden-

¹Le problème spectral inverse (voir Bui [13], Ladevèze et al. [48]) se propose de déterminer la distribution des modules élastiques à partir de la réponse vibratoire du corps.

tification explicite des modules élastiques on a proposé une décomposition des champs de déformation et de contrainte sur une base orthogonale. La base correspond en élasticité isotrope à la partie sphérique et déviatorique des tenseurs, et généralement en élasticité anisotrope aux tenseurs propres. Les tenseurs propres et les modules propres sont les vecteurs propres et les valeurs propres du tenseur d'élasticité considéré comme tenseur d'ordre deux dans un espace à 6 dimensions. Suite à cette décomposition des champs on obtient une décomposition de l'erreur en loi de comportement qui permet l'identification directe des modules propres lors de la minimisation.

La convergence de la méthode proposée a été illustrée à l'aide d'un exemple uni-dimensionnel (traité complètement analytiquement) d'une sphère contenant une inclusion soumise à une pression hydro-statique.

Dans le troisième chapitre on présente les résultats numériques des reconstructions obtenues en minimisant l'erreur en loi de comportement. Il s'agit de problèmes bidimensionnels en élasticité isotrope ou à symétrie cubique (composite aluminium-cuivre), pour lesquels on a reconstruit différentes distributions des modules élastiques à partir des mesures simulées par des calculs directes.

Les résultats montrent que la minimisation de l'ELC donne un algorithme raisonnablement exact et stable pour l'identification des modules élastiques. Pour des inclusions situées à l'intérieur du domaine, la reconstruction est une image lissée avec une bonne représentation de la position et de la forme de l'inclusion, même pour des mesures bruitées.

En comparant les résultats obtenus en élasticité avec celles de Kohn et McKenney [39] en électricité on observe des images de qualité comparables, même si les méthodes n'ont pas été parfaitement équivalentes. Un point important dans le problème élastique est la réussite de l'identification dans un cas anisotrope, ainsi que l'identification d'un matériau isotrope avec une erreur en loi de comportement correspondant à la symétrie cubique. Dans le cas électrique, Kohn et McKenney [39] ont rencontré des fortes instabilités lors du passage en anisotropie, ce qui était en apparence contradiction avec la théorie.

Le problème d'identification des contraintes résiduelles est posé dans l'annexe B.

Dans une première partie on présente l'influence des contraintes résiduelles sur le comportement élastique d'un solide. L'équation de comportement a été déduite (voir [28, 53]) après une linéarisation soignée des équations de l'élasticité finie ². La contrainte résiduelle devient ainsi une quantité constitutive, caractérisant le comportement de la même manière que les modules élastiques ou la densité. Utilisant cette équation on peut imaginer une méthode non destructive pour la mesure des contraintes résiduelles. Les difficultés d'une telle approche proviennent de la

²Le point de départ de cette approche remonte aux travaux de Cauchy [20], mais n'a pas été utilisé que rarement dans la suite.

métrologie de haute précision demandée.

Dans une deuxième partie on a résolu (avec P. Ballard [4, 5]) un problème lié à la mesure des contraintes résiduelles par rayons X. La mesure du tenseur de contrainte résiduelle par diffraction de rayons X en un point intérieur d'un solide nécessite un enlèvement de matière. Cet enlèvement de matière induit une redistribution des contraintes de telle sorte que la contrainte mesurée diffère, en général, de la contrainte initiale. On s'est intéressé au problème de la reconstruction du champ de contrainte résiduelle initiale à partir des contraintes mesurées en surface après enlèvement de matière. Pour le cas général, un algorithme numérique de reconstruction est présenté. Dans le cas du massif semi-infini bidimensionnel et tridimensionnel, des formules explicites ont été obtenues. Le résultat est un gain important par rapport aux solutions (voir Moore et Evans [55]) utilisées à l'heure actuelle dans ce problème, bien connu des expérimentateurs qui font des mesures de contraintes résiduelles par diffraction des rayons X.

Chapitre 1

Problème d'identification

Ce chapitre est consacré à la présentation du problème d'identification de la distribution interne des modules élastiques en élasto-statique linéaire.

Dans un premier temps on indique ses rapports avec les problèmes élastiques directs (paragraphe 1.1) et on présente ses liens avec le problème d'identification des conductivités électriques (paragraphe 1.2). Dans un second temps on étudie les propriétés de l'application de Dirichlet-Neumann (paragraphe 1.3), on présente les résultats d'existence et de stabilité connus pour ce problème dans le cas élastique isotrope et on indique une conjecture d'unicité pour le cas élastique anisotrope (paragraphe 1.5). Ensuite on étudie la détermination des charges optimales à appliquer sur un corps pour identifier une distribution interne des modules élastiques donnés.

1.1 Le problème mathématique

On considère un corps élastique qui occupe dans la configuration de référence un domaine régulier Ω , de frontière $\partial\Omega$. On notera $\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$, respectivement les champs vectoriels des déplacements, les champs tensoriels des déformations et des contraintes.

Dans l'hypothèse des petits déformations (élasticité linéaire), et avec un état initial libre de contrainte les équations gouvernant sur Ω sont :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad . \quad (1.1)$$

Où \mathbf{C} désigne le tenseur d'ordre quatre des modules élastiques. On va supposer, qu'il est inhomogène, ce qui veut dire que sa valeur dépend du point $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x})$$

Pour l'instant on ne choisit aucune symétrie matérielle particulière pour \mathbf{C} . On rappelle que, dans ce qui suit, la symétrie matérielle du tenseur d'élasticité est

conçue comme une propriété de symétrie locale du tenseur $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Par contre, on suppose que les symétries classiques du tenseur \mathbf{C} :

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij}, \quad (1.2)$$

sont respectées. Ceci résulte de la symétrie du tenseur des contraintes, de la symétrie du tenseur des déformations et respectivement de l'existence d'un potentiel élastique [49]. L'existence du potentiel élastique implique aussi que le tenseur élastique est défini positif. Dans les conditions précisées, les équations (1.1) s'écrivent sous la forme d'un système elliptique pour le déplacement \mathbf{u} dans le domaine Ω :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

Le *problème direct* pour ce système est défini, si on suppose \mathbf{C} connu, et que l'on rajoute une condition aux limites. On a :

- un **problème de Dirichlet**, si les déplacements sont imposés sur $\partial\Omega$:
 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi}$,
- un **problème de Neumann**, si les forces sont imposées sur $\partial\Omega$:
 $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}$, avec \mathbf{n} normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$,
- un **problème mixte** si on impose les déplacements sur une partie de la frontière et les forces sur la partie complémentaire.

Il est bien connu (voir [45]) que ces problèmes classiques ont une solution unique ¹ et que la continuité de la solution par rapport aux conditions aux limites est assuré.

Si on veut identifier la distribution intérieure de \mathbf{C} dans Ω on ajoute une nouvelle inconnue aux problèmes sans apporter d'information additionnelle. Pour sortir de cette impasse, il faut faire une hypothèse supplémentaire. Par exemple on peut supposer :

- qu'on connaît *simultanément* sur la frontière le déplacement $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ et la force imposée $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ pour plusieurs solutions indépendantes de (1.3)
- qu'on connaît la déformation sur une partie de la frontière $\partial\Omega$ ou sur une ligne intérieure du domaine pour plusieurs solutions indépendantes de (1.3)

Dans ce travail on part de la connaissance simultanée des déplacements et des forces sur la frontière pour reconstruire $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Ceci définit un *problème inverse* dont les équations et les conditions aux limites, surabondantes, sont les suivantes :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi} \quad (1.4)$$

où $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ sur la frontière sont obtenues à l'aide de mesures.

Le cas idéal est évidemment la connaissance parfaite de *toutes* les paires possibles (déplacement-force) sur la frontière. Ceci équivaut à la connaissance de l'application de Dirichlet-Neumann (ou de son inverse) :

¹Pour le problème de Neumann, l'existence est assurée si les forces extérieures sont auto-équilibrées et l'unicité est définie à un déplacement rigide près

$$\Lambda_C : \mathbf{u}|_{\partial\Omega} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$$

qui associe à chaque déplacement sur la frontière la force imposée correspondante.

Le problème inverse peut être reformulé dans *le cas idéal* de manière suivante :

Déterminer \mathbf{C} connaissant Λ_C

Dans *le cas réel* on aura seulement accès à un nombre fini de déplacements et de forces mesurés en un nombre fini de points. On aura donc seulement une projection de Λ_C sur un espace de dimension fini. La formulation exacte de ce problème sera discutée dans le chapitre suivant où on donnera aussi une formulation variationnelle du problème réel.

1.2 Questions importantes et résultats existants

Le problème d'identification formulé dans la section précédente est un problème inverse : il s'agit de déterminer les paramètres d'une équation elliptique du deuxième degré à partir de la connaissance des valeurs des déplacements et des forces sur la frontière.

Un autre problème d'identification, mathématiquement similaire, a été l'objet de beaucoup d'attention ces dernières années. Il s'agit de l'identification de la distribution intérieure de la conductivité électrique (ou thermique) dans un corps à partir des mesures de potentiel et de flux sur la surface du corps. Ce problème a reçu plusieurs noms, parmi lesquels tomographie électrique est le plus courant. En le formulant brièvement, dans le même esprit que le problème élastique de la section précédente, il s'agit de :

Déterminer γ connaissant Λ_γ

où γ est la conductivité électrique et Λ_γ l'application DN, qui associé à un potentiel donné sur la frontière le flux correspondant. Les applications de ce problème inverse se trouvent dans le domaine de l'électricité, la tomographie médicale, l'identification des fissures, ..., autant que dans les domaines qui sont gouvernés par des équations de même nature : l'identification du coefficient de conductivité thermique ou celui de perméabilité (loi de Darcy). Une riche bibliographie sur le sujet aussi bien du point de vue mathématique que des applications se trouve dans [43, 39, 41, 42, 11].

Dans la suite on va reprendre les questions et les résultats existants dans le cas électrique et on va les utiliser comme guide pour nos recherches dans le cas du problème élastique. Une liste de questions possibles sur le problème d'identification électrique est la suivante :

- *Est-ce que Λ_γ détermine γ de façon unique ?*

Ce résultat d'unicité a été démontré essentiellement pour des conductivités isotropes. Dans un premier temps Calderon [16] a donné une technique de caractérisation des petites perturbations du coefficient de conductivité en projetant les mesures sur un espace de solutions du problème non perturbé. Ensuite Kohn et Vogelius [41] ont montré que les mesures sur la frontière déterminent de façon unique la conductivité et ses dérivées au voisinage de la frontière. Un corollaire immédiat est l'unicité (par prolongation analytique) pour des conductivités analytiques. Dans un deuxième temps, ils démontrent que cela est aussi vrai pour des conductivités analytiques par morceaux [42]. D'autres travaux, prolongent ces résultats pour des problèmes dans des espace de dimension $n \geq 3$ [1], pour des conductivités contenant des inclusions [26], où pour des conductivités de classe C^∞ [69].

Une classe spéciale des travaux a été consacrée à la détection de fissures par le même type de mesures [9, 63]. Bryan et Vogelius ont montré que dans un domaine plan n fissures sont complètement déterminées par $n + 1$ mesures correspondant à des flux spécifiques.

Pour des conductivités anisotropes Tartar a construit deux conductivités, différent par un difféomorphisme du domaine, et ayant les mêmes mesures potentiel-flux à la frontière. Cet exemple est exposé dans [43]. La conjecture naturelle d'unicité est que ces difféomorphismes sont les seules restrictions, à l'unicité. Des démonstrations partielles de cette conjecture sont exposées dans [70, 69].

- *Si oui, est-ce que la dépendance est continue ?*

Comme la question d'unicité a eu une réponse affirmative on peut poser la question de stabilité, donc la question de continuité de l'application $\Lambda_\gamma \longrightarrow \gamma$. Un premier résultat, dû à Alessandrini [1], montre que la continuité existe, mais dans des normes faibles qui ne la rendent pas intéressante pour les applications pratiques. D'autres travaux [26, 24, 39] confirment ce résultat autant de point de vue théorique que numérique.

Une conséquence de la faible continuité de l'application $\Lambda_\gamma \longrightarrow \gamma$ est le fait que le problème d'identification est un problème mal posé, dans le sens où une faible perturbation des données, les mesures de Λ_γ , peut provoquer une grande perturbation de la solution γ . Ce phénomène est bien connu pour une grande partie des problèmes inverses.

- *Comment peut-on caractériser Λ_γ ?*

Quand on dit "caractérisation", on essaie de relier l'application de Dirichlet-Neumann avec des objets plus connus ou si possible plus explicites. La plus importante propriété pour l'application Dirichlet-Neumann, issue du principe

des puissances virtuelles, est son équivalence avec l'application énergie. Cette relation est à la base de la méthode de Calderon [16] et donc des résultats d'unicité [41, 42, 26].

Du point de vue pratique, les relations de l'application de Dirichlet-Neumann avec les fonctions de Green du domaine semblent plus naturelles. Le problème est qu'on ne connaît pas de fonctions de Green explicites pour des domaines finis, et donc les relations sont seulement implicites. Utilisant une représentation de la fonction de Green, comme série des fréquences et modes propres de vibration d'un problème à valeurs propres associées, Isaakson et al. [33, 34, 35] ont donné une telle caractérisation de l'application Dirichlet-Neumann.

- *Est qu'il existe des algorithmes numériques effectifs pour la reconstruction de γ ?*

On va grouper les méthodes pratiques de reconstruction dans trois catégories en fonction du problème : problème linéarisé, ou problème non linéaire, une catégorie à part étant formée par l'identification des fissures. Tous les travaux proposent des méthodes de reconstruction pour des conductivités isotropes. Pour le *problème linéarisé* on peut citer :

- une méthode de rétro-projection (backprojection) due à Santosa et Vogelius [64]
- une méthode réduisant le problème à un problème de moments en développant la solution sur une base sinusoidale [2] (ce travail pose aussi la question de la stabilité de la solution)
- des méthodes de minimisation directes des distances au sens des moindres carrées (par exemples des mesures de potentiels pour un flux donné). Parmi les travaux, on peut citer Dobson [25] qui a démontré la convergence d'une méthode de ce type mais sans examiner la fiabilité de la reconstruction et Lin et Jones [50] qui ont fait des expériences pratiques et numériques en minimisant la distance entre les potentiels mesurés et calculés.

Pour le *problème non linéaire* on a :

- des méthodes utilisant la minimisation d'une fonctionnelle : l'erreur en loi de comportement. Ici on peut citer les travaux théoriques de Kohn et Vogelius [43], ainsi que les travaux contenant des applications numériques dues à Kohn et al. [39, 40]
- une étude théorique proposant la minimisation directe d'une distance au sens des moindres carrées en utilisant la méthode de l'état adjoint [11]

Pour *l'identification des fissures* des techniques spéciales ont été développées par Vogelius et al. [9, 63]. Elles reposent essentiellement sur la dérivation d'une distance entre les flux mesurés et calculés par rapport aux paramètres géométriques de la fissure. Un aspect intéressant de ce travail est le calcul du flux optimal pour identifier une fissure donnée qui permet de répondre à la question suivante.

En étudiant le problème d'identification des fissures par des mesures thermiques Andrieux et Ben Abda [3] ont continué les travaux précédents et ont défini un procédé d'identification du plan des fissures dans des problèmes tridimensionnels [3].

- *Quelle sont les meilleures mesures pour distinguer deux distributions γ_1 et γ_2 ?*

On a remarqué précédemment que cette question a déjà été posée pour l'identification d'une famille finie de fissures [9, 63]. Une réponse générale à cette question a été formulée par Isaakson et al. [33, 34, 35]. Leurs travaux ont montré que les meilleurs chargements pour distinguer entre distributions sont les fonctions propres associées à un opérateur pseudo-différentiel. L'opérateur étant exactement la différence des applications Dirichlet-Neumann inverses des deux distributions, $\Lambda_{\gamma_1}^{-1} - \Lambda_{\gamma_2}^{-1}$.

Dans ce travail nous sommes guidés par les questions posées et les résultats démontrés dans le cas du problème électrique. On va reprendre maintenant les mêmes questions en indiquant les travaux existants pour le problème élastique, en indiquant à chaque moment quelles sont les résultats connus et les contributions apportées dans ce travail.

- *Est-ce que $\Lambda_{\mathbf{C}}$ détermine \mathbf{C} de façon unique ?*

Les seuls résultats d'unicité connus en élasticité, à notre connaissance, concernent le cas isotrope, où l'identification porte sur les modules de Lamé. Ikehata a démontré [31], en utilisant la technique de Calderon [16], que les mesures sur la frontière déterminent complètement les perturbations des modules élastiques, ce qui équivaut à l'unicité du problème linéarisé. Un résultat similaire a été obtenu par Nakamura et Uhlmann [58].

L'unicité du problème linéarisé dans le cas des plaques Love-Kirchhoff vient d'être démontrée par Ikehata [32].

Dans le cas de l'élasticité anisotrope, on a construit à partir de l'exemple de Tartar [43], deux distributions des modules élastiques, reliées par un difféomorphisme, donnant les mêmes mesures force-déplacement sur la frontière (section 1.5). La conjecture naturelle d'unicité est que ces difféomorphismes sont les seules restrictions à l'unicité. Utilisant l'information obtenue par la méthode numérique proposée dans ce travail on a formulé une conjecture d'unicité plus forte (section 1.5) qui affirme que seulement une partie des modules élastiques (les modules propres) peut être déterminé par des mesures en surface.

- *Si oui, est-ce que la dépendance est continue ?*

Le caractère faible de la continuité, qui équivaut au fait que le problème est mal posé a seulement été mis en évidence en formulant le problème d'identification comme équation de Fredholm de première espèce et par des exemples

numériques dans un travail réalisé avec Bonnet [12] (section 1.6).

- *Comment peut-on caractériser $\Lambda_{\mathbf{C}}$?*

Dans le cas élastique on peut relier l'application DN, comme dans le cas électrique [41, 42, 33], avec la fonctionnelle énergie et avec les fonctions de Green. Les relations correspondantes sont explicites dans les sections suivantes de ce chapitre.

- *Est qu'il existe des algorithmes numériques effectifs pour la reconstruction de \mathbf{C} ?*

A notre connaissance deux approches ont été proposées pour la reconstruction numérique de la distribution des modules élastiques à partir des mesures sur la frontière.

- Une méthode minimisant l'erreur en loi de comportement, généralisant l'approche utilisée en électricité (cas des conductivités isotropes) de Kohn et Vogelius [43, 39] en élasticité isotrope [18] et anisotrope [19]. Cette méthode est présentée dans le chapitre 2 et les résultats numériques des reconstructions pour les cas isotrope et à symétrie cubique sont présentées dans le chapitre 3.
- Un schéma de reconstruction proposé récemment par Kubo et al. [44], qui détermine la distribution des modules élastiques à partir d'une estimation de la matrice de rigidité.
- *Quelle sont les meilleures mesures pour distinguer entre deux distributions \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 ?*

Une première approche essayant de donner une réponse a cette question est présentée dans le paragraphe 1.7. En restant dans l'esprit des travaux effectués dans le cas électrique [33, 34, 35] on a montré que les meilleurs charge-ments pour distinguer deux distributions sont les fonctions propres associées à l'opérateur pseudo-différentiel $\Lambda_{\mathbf{C}_1}^{-1} - \Lambda_{\mathbf{C}_2}^{-1}$, comme dans le problème électrique.

1.3 Caractérisations de l'application DN

Examinons maintenant quelques relations entre les champs de déplacements et de forces sur la frontière et les champs définis à l'intérieur du domaine. Les relations sont obtenues en appliquant le théorème de l'énergie, ou le principe des puissances virtuelles selon les cas.

On définit la fonctionnelle d'énergie d'un corps élastique Ω de tenseur élastique \mathbf{C} comme l'application qui fournit pour chaque champ de déplacements \mathbf{u} sur Ω

l'énergie de déformation correspondante :

$$Q_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \, dx$$

A l'aide du théorème de l'énergie on va montrer dans ce qui suit, que la connaissance de la fonctionnelle de l'énergie est équivalente à la connaissance de l'application Dirichlet-Neumann (paragraphe 1.3.1).

Puis, en utilisant le même théorème on va discuter des propriétés de monotonie des applications $\mathbf{C} \rightarrow Q_{\mathbf{C}}$ et $\mathbf{C} \rightarrow \Lambda_{\mathbf{C}}$ (paragraphe 1.3.3).

1.3.1 Les applications Energie et DN

On va commencer par montrer que la connaissance de l'application de Dirichlet-Neumann $\Lambda_{\mathbf{C}}$ implique la connaissance de l'application énergie. Supposons qu'on veut déterminer l'énergie de déformation $Q_{\mathbf{C}}(\mathbf{u})$ correspondant au champ des déplacements \mathbf{u} , celle-ci s'écrit :

$$Q_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \, dx \quad .$$

Le membre droite de cette expression est facile à exprimer à partir des valeurs sur la frontière en utilisant le Principe des puissances virtuelles :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \, ds \quad .$$

Où $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ est la contrainte correspondant au champ des déplacements \mathbf{u} . La force sur la frontière est $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u})$, donc :

$$Q_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) \, ds \quad (1.5)$$

La démonstration réciproque, quand on veut exprimer l'application de Dirichlet-Neumann en partant de l'application énergie, paraît plus difficile car il faut exprimer "la connaissance de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ " explicitement. On va supposer que $\Lambda_{\mathbf{C}}$ est connue quand on connaît les valeurs de :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) \, ds \quad (1.6)$$

pour tous les champs de déplacement \mathbf{u} et \mathbf{v} . Ceci représente en effet une décomposition de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ sur une base de fonctions sur $\partial\Omega$. On part donc de l'expression (1.6) avec deux champs de déplacements \mathbf{u} et \mathbf{v} et on transforme l'intégrale de surface en une intégrale de volume à l'aide du principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) \, ds = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \, dx \quad . \quad (1.7)$$

Pour faire intervenir dans la partie droite de cette expression l'application $Q_{\mathbf{C}}$, on utilise l'identité de polarisation qui s'exprime de manière suivante :

$$\begin{aligned} 4 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \, dx &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{v}) \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{v}) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{v}) \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{v}) \, dx \end{aligned}$$

En regroupant les relations on obtient :

$$4 \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) \, ds = Q_{\mathbf{C}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q_{\mathbf{C}}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (1.8)$$

1.3.2 Formules de réciprocité

On va reprendre maintenant les relations obtenues dans le paragraphe précédent en considérant $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C}$, avec \mathbf{C}_0 une partie supposée connue et $\delta\mathbf{C}$ une perturbation qui reste à identifier.

En utilisant la partition mentionnée avant on décompose le problème physique (perturbé) :

$$\operatorname{div}((\mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C})\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

en un problème non perturbé associé :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}_0 \nabla \mathbf{u}_0) = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

et un problème relatif à la perturbation $\delta\mathbf{u}$ de la solution :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C}_0 \nabla \delta\mathbf{u}) &= -\operatorname{div}(\delta\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}) \\ \delta\mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.11)$$

où la solution du problème physique s'écrit évidemment :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}$$

Dans le même esprit on peut développer les applications $\mathbf{C} \longrightarrow Q_{\mathbf{C}}$ et $\mathbf{C} \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{C}}$, au premier ordre au point $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C}$. Le développement pour $\Lambda_{\mathbf{C}}$ est :

$$\Lambda_{\mathbf{C}} = \Lambda_{\mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C}} = \Lambda_{\mathbf{C}_0} + d\Lambda_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}]$$

où $d\Lambda_{\mathbf{C}}$ est la différentielle de Fréchet de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ calculée au point \mathbf{C} . Pour l'application $Q_{\mathbf{C}}$ on obtient une formule similaire :

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{C}} &= Q_{\mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C}} \\ &= Q_{\mathbf{C}_0} + dQ_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}] = Q_{\mathbf{C}_0} + Q_{\delta\mathbf{C}} \end{aligned}$$

ou $dQ_{\mathbf{C}}$ est la différentielle de Fréchet de $Q_{\mathbf{C}}$ calculée au point \mathbf{C} avec : $dQ_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}] = Q_{\delta\mathbf{C}}$, assurée par la linéarité de l'application $\mathbf{C} \rightarrow Q_{\mathbf{C}}$.

En considérant seulement les termes du premier ordre dans le développement de (1.5) on obtient pour $Q_{\delta\mathbf{C}}(\mathbf{u}_0)$ l'expression suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 \delta\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}_0 dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 d\Lambda_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}](\mathbf{u}_0) ds \quad (1.12)$$

L'importance de cette formule vient du fait qu'elle relie l'inconnue $\delta\mathbf{C}$ avec des valeurs mesurables à la frontière $(\mathbf{u}_0, d\Lambda_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}](\mathbf{u}_0))$ par l'intermédiaire de \mathbf{u}_0 qui est la solution du problème non perturbé et alors aussi connue. En utilisant la formule de polarisation on obtient le principe des puissances virtuelles appliqué à la relation précédente sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 \delta\mathbf{C} \nabla \mathbf{v}_0 dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \Lambda_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}](\mathbf{v}_0) ds \quad (1.13)$$

Une autre manière d'obtenir cette formule est d'appliquer la formule de réciprocité de Maxwell-Betti au champ des déplacements \mathbf{u} solution du problème perturbé et au champ \mathbf{v}_0 solution du problème non perturbé :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C}) \nabla \mathbf{v}_0 dx - \nabla \mathbf{v}_0 \mathbf{C}_0 \nabla \mathbf{u}] dx = \\ = - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{u} \Lambda_{\mathbf{C}_0}(\mathbf{v}_0) ds - \mathbf{v}_0 \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u})] ds \end{aligned} \quad (1.14)$$

ou plus simplement :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \delta\mathbf{C} \nabla \mathbf{v}_0 dx = - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{u} \Lambda_{\mathbf{C}_0}(\mathbf{v}_0) ds - \mathbf{v}_0 \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u})] ds \quad (1.15)$$

Si on garde seulement les termes au premier ordre et qu'on décompose $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}$ on obtient de nouveau (1.13). Le passage est trivial quand on tient compte du développement de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ et de la symétrie :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \Lambda_{\mathbf{C}_0}(\mathbf{v}_0) ds = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \Lambda_{\mathbf{C}_0}(\mathbf{u}_0) ds$$

Les équations (1.13) et (1.15) sont connues comme *relations de réciprocité*. Il est évident que (1.13) est la linéarisation de (1.15). Elles sont importantes car elles relient des variables observables : les déplacements et forces sur la frontière, aux variables inconnues : la perturbation des modules élastiques.

L'intérêt des équations (1.13) et (1.15) ne se limite pas toutefois au constat ci-dessus : des équations de réciprocité, obtenues suivant le même principe mais dans d'autres contextes, ont été appliquées avec succès (identification de facteurs d'intensité de contraintes dynamiques [14], identification de fissures par mesures électrostatiques [3]). La démarche du dernier travail cité est d'ailleurs susceptible d'extensions à des problèmes d'identification de fissures en élasticité (voir A.3). Une application directe de ces équations est la démonstration de l'unicité de la solution du problème d'identification [31, 58].

1.3.3 Propriétés de monotonie

C'est un fait bien connu que des corps "plus durs" se déforment moins quand ils sont chargés avec le même système des forces. Compte tenu de ce qu'on a vu auparavant cette propriété se traduit par la décroissance de $\mathbf{C} \longrightarrow Q_{\mathbf{C}}$ et la croissance de $\mathbf{C} \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{C}}$.

On va examiner ces résultats suivant l'approche présentée par Bui [13] en élasticité et celle d'Isaakson [33] pour le problème électrique équivalent.

Pour définir une relation d'ordre entre les tenseurs d'élasticité, les applications $Q_{\mathbf{C}}$ et $\Lambda_{\mathbf{C}}$, on définit :

- $\mathbf{C} \leq \mathbf{L}$ si et seulement si $\epsilon \mathbf{C} \epsilon \leq \epsilon \mathbf{L} \epsilon$ pour tout champ de déformations ϵ donné sur Ω ,
- $\Lambda_{\mathbf{C}} \leq \Lambda_{\mathbf{L}}$ si $\int_{\partial\Omega} \xi \Lambda_{\mathbf{C}}(\xi) ds \leq \int_{\partial\Omega} \xi \Lambda_{\mathbf{L}}(\xi) ds$ pour tout champ de déplacements ξ donné sur $\partial\Omega$,
- $Q_{\mathbf{C}} \leq Q_{\mathbf{L}}$ si $\int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} ds \leq \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} \mathbf{L} \nabla \mathbf{u} ds$ pour tout champ de déplacements \mathbf{u} donné sur Ω .

Les propriétés de monotonie s'expriment alors mathématiquement sous la forme :

$$\mathbf{C} \leq \mathbf{L} \Leftrightarrow \Lambda_{\mathbf{C}} \geq \Lambda_{\mathbf{L}} \quad (1.16)$$

et :

$$\mathbf{C} \leq \mathbf{L} \Leftrightarrow Q_{\mathbf{C}} \leq Q_{\mathbf{L}} \quad (1.17)$$

La croissance de l'application énergie est évidente compte tenu de l'expression de $Q_{\mathbf{C}}$ comme forme quadratique des déformations.

On va montrer maintenant la décroissance de l'application : $\mathbf{C} \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{C}}$.

Dans la suite on va utiliser l'énergie potentielle, qu'on définit par la relation :

$$P_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) ds \quad (1.18)$$

Si \mathbf{u} est solution de l'équation d'élasticité :

$$\text{div}(\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (1.19)$$

et \mathbf{v} est un déplacement virtuel, nul sur la frontière, alors suite au théorème de l'énergie et au principe des puissances virtuelles on a :

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{C}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= P_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \mathbf{C} \nabla \mathbf{v} dx \\ &\geq P_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Déplacements mesurés pour force = 500, 1250, 2000 N

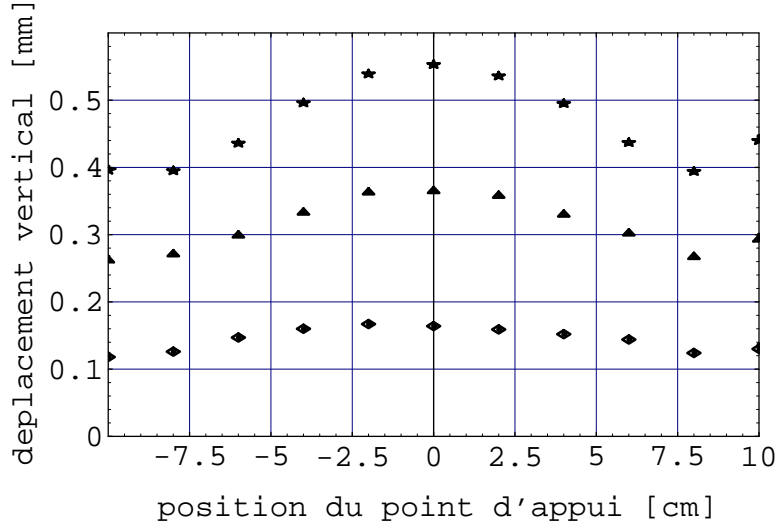


FIG. 1.1 – Mesures d'enfoncement d'un poinçon cylindrique sur l'arrête d'une plaque d'époxy

Soit ξ un champ de déplacements donné sur $\partial\Omega$, et \mathbf{u}_C et \mathbf{u}_L les solutions des problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}_C) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_C|_{\partial\Omega} &= \xi \end{aligned} \quad (1.21)$$

et :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{L}\nabla\mathbf{u}_L) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_L|_{\partial\Omega} &= \xi \end{aligned} \quad (1.22)$$

Compte tenu de la croissance de l'application $\mathbf{C} \rightarrow Q_C$ et de l'hypothèse initiale $\mathbf{C} \leq \mathbf{L}$ on obtient d'un part pour tout champ \mathbf{v} :

$$P_C(\mathbf{v}) \geq P_L(\mathbf{v}) \quad (1.23)$$

et d'autre part, suite à l'inégalité (1.20), on a :

$$P_L(\mathbf{v}) \geq P_L(\mathbf{u}_L) \quad (1.24)$$

En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_C$ dans les deux inégalités précédentes on obtient :

$$P_C(\mathbf{u}_C) \geq P_L(\mathbf{u}_L) \quad (1.25)$$

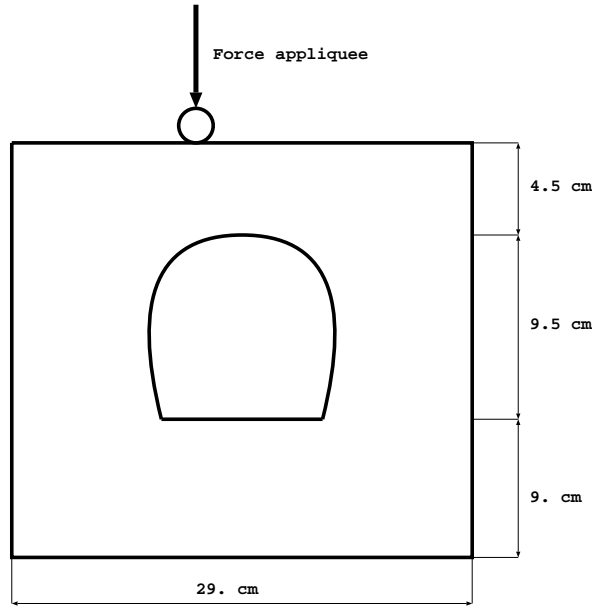


FIG. 1.2 – Forme de la plaque d'époxy

Puis en utilisant maintenant les théorèmes de l'énergie pour ces deux problèmes :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \xi \Lambda_{\mathbf{C}}(\xi) ds + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{C}} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{C}} dx &= \\ &= \int_{\partial\Omega} \xi \Lambda_{\mathbf{L}}(\xi) ds + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{L}} \mathbf{L} \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{L}} dx \end{aligned} \quad (1.26)$$

on obtient l'inégalité souhaitée :

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \xi \Lambda_{\mathbf{C}}(\xi) ds \leq -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \xi \Lambda_{\mathbf{L}}(\xi) ds \quad (1.27)$$

qui implique après un changement de signe la décroissance de l'application $\mathbf{C} \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{C}}$.

Mis à part l'intérêt théorique de la proposition démontrée, elle pourrait être utilisée pour déterminer paramétriquement la localisation d'une inclusion ainsi que sa dureté par rapport à la matrice. Dans la suite on présente brièvement quelques mesures effectuées sur une plaque d'époxy, ou les différences entre les énergies de déformation sont traduites par des déplacements différents pour un même chargement appliqué à des endroits différents.

Des mesures d'enfoncement d'un poinçon cylindrique effectuées à charge constante en différents points de l'arrête supérieure d'une plaque d'époxy (voir fig. 1.2) sont présentées sur la figure 1.1. On remarque d'une part l'influence du trou, qui conduit pour une même force appliquée à des déplacements différents, et d'autre part l'influence du bord, qui conduit aussi à une augmentation du déplacement mesuré.

1.4 Application de DN et vibrations libres

Dans les sections précédentes on a considéré différentes relations intégrales fournissant des informations sur les champs intérieurs par le biais d'informations obtenues sur la frontière du corps. Ces relations caractérisent l'application DN d'une manière globale sans nous fournir une représentation directe. Utilisant les fonctions de Green pour un domaine borné (voir annexe A.2, [45]) on peut donner une formule intégrale qui représente le déplacement sur cette frontière par une convolution entre une fonction de Green et la force correspondante sur la frontière. Dans la suite on va s'intéresser à cette relation, qui correspond en effet à une représentation de l'inverse de l'application DN, et qui relie le problème d'identification considéré au problème spectral inverse, pour des corps à densité de masse homogène.

On va d'abord se poser la question de l'existence de l'inverse de l'application DN, car deux déplacements différents par un mouvement rigide déforment le corps de telle sorte que la distribution des forces à la frontière reste la même.

Il est alors nécessaire de déterminer l'inverse de la restriction de l'application DN, noté par abus de langage $\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}$. Pour φ un champs des forces sur $\partial\Omega$, on définit

$$\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi) = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega} \quad (1.28)$$

où \mathbf{u} est l'unique champs des déplacements solution du problème aux limites suivant :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}[\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad (1.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \varphi \quad (1.30)$$

vérifiant les conditions :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{w}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad k = 1, 6 \quad (1.31)$$

où $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}[\cdot] = -\text{div}(\mathbf{C}\cdot)$ est l'opérateur de Lamé et $(\mathbf{w}^k)_{k=1}^6$ est une base orthonormée dans le sous-espace des déplacements rigides. Si le corps est à densité de masse homogène on peut considérer que ces déplacements sont les 6 premiers éléments de la base des modes propres de vibrations $(\mathbf{w}^k)_{k=0}^{\infty}$ (voir annexe A.2). On rappelle qu'ils correspondent à la première fréquence propre $\omega_0 = 0$.

Il est évident que :

$$\Lambda_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\xi}) = \varphi \quad (1.32)$$

D'autre part avec la définition de $\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}$ on peut réécrire la relation (A.18) sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\xi} = \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.33)$$

avec \mathbf{G} la solution fondamentale de Green pour le domaine borné du tenseur d'élasticité \mathbf{C} .

Utilisant cette relation on va considérer le spectre de l'opérateur $\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}$. On note par φ_m les fonctions propres et par λ_m les valeurs propres de l'application $\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}$, défini par :

$$\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}[\varphi_m] = \lambda_m \varphi_m \quad (1.34)$$

La définition de la fonction de Green utilisant les modes propres permet l'écriture des relations suivantes entre les valeurs propres de l'application DN et les fréquences propres :

$$\begin{aligned} \lambda_k \varphi_m(\mathbf{y}) &= \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}[\varphi_m](\mathbf{y}) \\ &= \sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \left[\int_{\partial\Omega} \mathbf{w}^k(\mathbf{x}) \otimes \varphi_m(\mathbf{x}) dx \right] \mathbf{w}^k(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

On a mis ainsi en évidence une relation entre les modes propres des vibrations du corps et l'application $\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}$. Si on définit le *problème spectrale inverse* comme :

$$\text{Déterminer } \mathbf{C} \text{ connaissant le spectre } S_{\mathbf{C}} = (\omega^k, \mathbf{w}^k)_{k=0}^{\infty}$$

les relations précédentes permettent de déduire que :

$$\Lambda_{\mathbf{C}_1}^{-1} \neq \Lambda_{\mathbf{C}_1}^{-1} \Rightarrow S_{\mathbf{C}_1} \neq S_{\mathbf{C}_1} \quad (1.36)$$

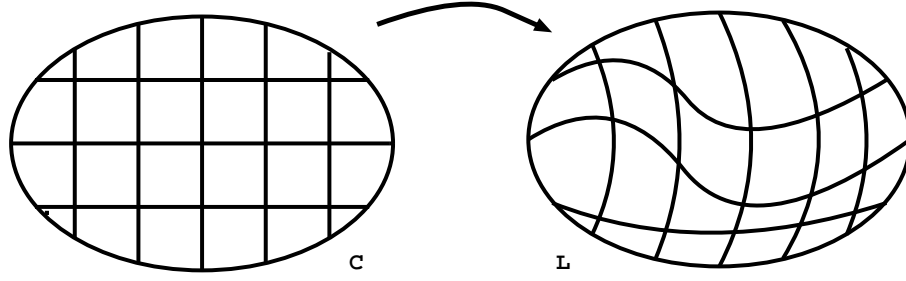
Ceci signifie que les résultats d'unicité de la solution du problème d'identification élasto-statique sont aussi des résultats d'unicité du problème spectral inverse si on considère le corps à densité de masse constante. On remarque que dans le cas plus général des corps à densité de masse inhomogène, le problème spectral inverse se propose de déterminer aussi la densité de masse. Ce problème est discuté dans [8, 48]. Dans ce cas le résultat précédent donne seulement une relation entre le problème d'identification élasto-statique et le problème spectral inverse correspondant à l'opérateur de Lamé.

1.5 Résultats d'unicité et de stabilité

1.5.1 Perte d'unicité dans l'élasticité anisotrope

Dans ce paragraphe on montre que le problème d'identification posé précédemment n'admet pas une solution unique dans le cas général de l'élasticité anisotrope.

On va construire deux tenseurs d'élasticité \mathbf{C} et \mathbf{L} définis en Ω , avec les propriétés suivantes :


 FIG. 1.3 – Le difféomorphisme Ψ et les deux corps $\Omega_{\mathbf{C}}$ et $\Omega_{\mathbf{L}}$

- les tenseurs sont différents dans les points intérieurs :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{L}(\mathbf{x})$$

- les applications de DN sont égales :

$$\Lambda_{\mathbf{C}} = \Lambda_{\mathbf{L}}$$

Ceci signifie que pour chaque chargement donné, on va mesurer le même champ de déplacements à la frontière des deux corps, qui ont des tenseurs d'élasticité différents.

Prenons deux tenseurs d'élasticité \mathbf{C} et \mathbf{L} , et un difféomorphisme $\Psi : \Omega \rightarrow \Omega$ et égal à l'identité sur la frontière ($\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \partial\Omega$), reliées par la relation suivante :

$$L_{ijkl}(\Psi(\mathbf{x})) = |\det \nabla \Psi|^{-1} \sum_{n,m} C_{inkm}(\mathbf{x}) \Psi_{n,j}(\mathbf{x}) \Psi_{m,l}(\mathbf{x}) \quad (1.37)$$

La formule précédente ressemble à un changement des variables, mais on remarque que les valeurs des deux tenseurs \mathbf{C} et \mathbf{L} sont réellement déplacées, ce qui fait que les deux corps vont être différents.

Avant de passer effectivement à la démonstration du résultat regardons de plus près la question de l'existence de champs reliées par (1.37). La façon la plus simple d'obtenir de tels champs est de construire \mathbf{L} utilisant (1.37) à partir d'un tenseur d'élasticité \mathbf{C} et un difféomorphisme Ψ . Si on procède de cette manière on remarque que le tenseur \mathbf{L} ne respecte généralement pas toutes les symétries imposées à un tenseur d'élasticité. On a évidemment :

$$L_{ijkl} = L_{klij}$$

mais généralement les égalités :

$$L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} \quad (1.38)$$

ne sont pas vérifiées.

Pour un Ψ fixé on va construire un \mathbf{C} , tel que les relations (1.38) sont vérifiées. Ceci est possible, car en utilisant la relation (1.37), on transforme les conditions (1.38) en système linéaire pour les modules C_{ijkl} du tenseur \mathbf{C} :

$$\sum_{n,m} C_{inkm} \Psi_{n,j} \Psi_{m,l} - \sum_{n,m} C_{jnkm} \Psi_{n,i} \Psi_{m,l} = 0 \quad (1.39)$$

D'un part si on compte les équations indépendantes pour toutes les valeurs des indices on découvre que le système a 15 équations. D'autre part on sait que le nombre maximal de modules C_{ijkl} pour un corps anisotrope est 21. On a donc un système linéaire homogène à 24 équations et 21 inconnues, qui admet toujours une solution. En conséquence utilisant le \mathbf{C} solution du système pour un Ψ donné on obtient un tenseur d'élasticité \mathbf{L} avec les propriétés désirées. Avec ces champs on peut revenir à la démonstration.

Ecrivons la formule de changement de variable correspondant au difféomorphisme Ψ , $\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$, pour deux champs de déplacements \mathbf{u} et \mathbf{v} sur Ω en utilisant la relation (1.37) :

$$\int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Psi(\Omega)} (\nabla_{\mathbf{y}} (\mathbf{u} \circ \Psi^{-1})) \mathbf{L}(\mathbf{y}) (\nabla_{\mathbf{y}} (\mathbf{v} \circ \Psi^{-1})) d\mathbf{y} \quad (1.40)$$

Avec les notations : $\sigma_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$, et $\sigma_{\mathbf{L}}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$, on peut écrire la dernière relation après une intégration par parties sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{v} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \sigma_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) \mathbf{n} ds = \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \circ \Psi^{-1}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \sigma_{\mathbf{L}}(\mathbf{u} \circ \Psi^{-1}) d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \circ \Psi^{-1}) \sigma_{\mathbf{L}}(\mathbf{u} \circ \Psi^{-1}) \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

Utilisant le fait que Ψ est l'identité sur la frontière et en prenant \mathbf{u} solution d'un problème élastique avec tenseur d'élasticité \mathbf{C} et \mathbf{v} un déplacement virtuel la relation précédente devient :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \circ \Psi^{-1}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \sigma_{\mathbf{L}}(\mathbf{u} \circ \Psi^{-1}) d\mathbf{x} = 0$$

Alors, $\mathbf{u} \circ \Psi^{-1}$ est solution d'un problème élastique avec tenseur d'élasticité \mathbf{L} , parce que $\mathbf{v} \circ \Psi^{-1}$ reste un déplacement virtuel pour tout déplacement virtuel \mathbf{v} et tout difféomorphisme Ψ . En conséquence on a obtenu une bijection entre les solutions des problèmes élastiques correspondantes à \mathbf{C} et \mathbf{L} . Plus que ça, les solution correspondantes vont avoir, conformément à l'équation de changement de variables (1.40) la même énergie de déformation :

$$Q_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) = Q_{\mathbf{L}}(\mathbf{u} \circ \Psi^{-1})$$

où \mathbf{u} est une solution d'un problème ayant comme tenseur d'élasticité \mathbf{C} .

Ensuite par le biais de l'équivalence de la connaissance de l'application énergie et celle de l'application DN on obtient aussi :

$$\Lambda_{\mathbf{C}} = \Lambda_{\mathbf{L}}$$

En conclusion les deux corps de tenseurs d'élasticité différents vont fournir les mêmes mesures sur leurs frontières.

Dans ce qui a précédé on a suivi les idées de Kohn et Vogelius [43], qui ont construit un exemple similaire pour l'identification des coefficients de conductivité en électricité. La différence essentielle étant que dans le cas électrique on a moins de symétries pour les conductivités. La conséquence est que pour chaque difféomorphisme et chaque conductivité donnée on trouve la deuxième conductivité, différente de la première, qui donne la même réponse sur la frontière. On vient de voir que ceci n'est pas valable pour l'élasticité.

1.5.2 Discussion des résultats d'unicité

L'exemple de la section précédente montre que l'application DN ou $\Lambda_{\mathbf{C}}$, ne détermine pas uniquement les tenseurs d'élasticité \mathbf{C} . Il existe une classe de tenseurs élastiques, différent par un difféomorphisme, qui génèrent la même application DN. La conjecture naturelle est que ceci est la seule obstruction pour l'unicité.

Un résultat de ce type a été obtenue dans le problème d'identification électrique par Sun et Uhlmann [69], mais pas encore pour le problème élastique.

Pour le problème d'identification élastique on connaît actuellement deux résultats d'unicité, les deux étant obtenus dans le cas particulier de l'élasticité *isotrope*.

Le premier résultat, due à Ikehata [31], montre que :

$$d\Lambda_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}_1] = d\Lambda_{\mathbf{C}_0}[\delta\mathbf{C}_2] \implies \delta\mathbf{C}_1 = \delta\mathbf{C}_2 \quad (1.41)$$

pour \mathbf{C}_0 un tenseur élastique *isotrope* constant à l'intérieur du corps, et $\delta\mathbf{C}_1$ et $\delta\mathbf{C}_2$ deux perturbations *isotropes* de ce tenseur. Ce résultat ne donne pas l'unicité complet mais assure que les perturbations $\delta\mathbf{C}$ du tenseur \mathbf{C} élastique sont uniquement déterminées par l'approximation au premier ordre de $\Lambda_{\mathbf{C}+\delta\mathbf{C}}$ au point \mathbf{C} .

Le deuxième résultat, due à Sun et Uhlmann [69], montre pour l'élasticité *isotrope bidimensionnelle* que :

$$\Lambda_{\mathbf{C}_0+\delta\mathbf{C}_1} = \Lambda_{\mathbf{C}_0+\delta\mathbf{C}_2} \implies \delta\mathbf{C}_1 = \delta\mathbf{C}_2 \quad (1.42)$$

avec les notations utilisées précédemment.

On va énoncer brièvement le résultat exact de Ikehata. Ainsi on arrivera à une meilleure compréhension de la technique utilisée dans les démonstrations des résultats d'unicité.

On se situe dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité \mathbf{C} est représenté par les modules de Lamé $\mathbf{C} = (\lambda, \mu)$. On considère (λ_0, μ_0) constants à l'intérieur du corps

et $(\delta\lambda, \delta\mu)$ deux perturbations variables à l'intérieur du corps. Ikehata démontre que l'application DN est différentiable deux fois dans le sens de Fréchet et calcule les dérivées pour deux familles des solutions. A partir des deux vecteurs $\mathbf{m}, \mathbf{m}^\perp \in \mathbf{R}^3$, satisfaisant :

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^\perp = 0 \quad \text{et} \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{m}^\perp|$$

on définit :

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{m} + \sqrt{-1}\mathbf{m}^\perp}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \quad (1.43)$$

Avec ces notations, on a une première famille des champs de déplacements solutions du problème non perturbé :

$$\mathbf{u}_i = \nabla(\exp(-\mathbf{x} \cdot \mathbf{m})) \quad i = 1, 2 \quad (1.44)$$

En considérant les valeurs de ces champs sur la frontière, $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{v}_i|_{\partial\Omega}$ on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\xi}_1 \, d\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}[(\delta\lambda, \delta\mu)](\boldsymbol{\xi}_2) \, ds = \frac{|\mathbf{m}|^4}{4} \int_{\Omega} 2 \delta\mu \exp(-\sqrt{-1}\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) \, dx \quad (1.45)$$

La deuxième famille des solutions est obtenue pour $i, j = 1, 2$ par la formule :

$$\mathbf{u}_{ij} = (\lambda_0 + 2\mu_0) \triangle g_{ij} - (\lambda_0 + \mu_0) \nabla(\operatorname{div} g_{ij}) \quad (1.46)$$

ou g_{ij} est la fonction biharmonique :

$$g_{ij} = -\frac{1}{2} |\mathbf{p}|^{-2} (\mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{p}}_i) \mathbf{p}_j \quad (1.47)$$

On considérant les valeurs des derniers déplacements sur la frontière : $\boldsymbol{\xi}_3 = \mathbf{u}_{12}|_{\partial\Omega}$ et $\boldsymbol{\xi}_4 = \mathbf{u}_{21}|_{\partial\Omega}$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\xi}_3 \, d\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}[(\delta\lambda, \delta\mu)](\boldsymbol{\xi}_4) \, ds &= \mu_0^2 \frac{|\mathbf{m}|^4}{4} \int_{\Omega} 2 \delta\lambda \exp(-\sqrt{-1}\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) \, dx \\ &\quad + \mu_0^2 \frac{|\mathbf{m}|^4}{4} \int_{\Omega} 2 \delta\mu \exp(-\sqrt{-1}\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) \, dx \\ &\quad + (\lambda_0 + \mu_0)^2 \frac{|\mathbf{m}|^4}{8} \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 \int_{\Omega} 2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} \delta\lambda \exp(-\sqrt{-1}\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) \, dx \end{aligned} \quad (1.48)$$

Pour $\mathbf{m} \in \mathbf{R}^3$, les intégrales des formules (1.45) (1.48) donnent la transformée de Fourier spatiale des modules élastiques inconnus à partir des valeurs connues sur la frontière.

Si pour chaque $\mathbf{m} \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\xi}_1 \, d\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}[(\delta\lambda, \delta\mu)](\boldsymbol{\xi}_2) \, ds &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\xi}_3 \, d\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}[(\delta\lambda, \delta\mu)](\boldsymbol{\xi}_4) \, ds &= 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

on obtient évidemment :

$$\delta\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \delta\mu = 0 \quad (1.50)$$

ce qui assure que dans le cas de l'élasticité isotrope les perturbations des mesures au premier ordre $d\Lambda_{\mathbf{C}}[\delta\mathbf{C}]$ déterminent les perturbations du tenseur élastique $\delta\mathbf{C}$.

Les formules (1.45) et (1.48) permettent d'obtenir les perturbations du tenseur élasticité par transformation de Fourier inverse directement des perturbations des mesures. Toutefois, il est également bien connu [71] qu'en raison du caractère borné du domaine Ω , cette inversion est numériquement instable et est en particulier très sensible aux effets d'échantillonnage et de troncature.

Le résultat d'unicité de Nakamura et Uhlmann [58] est basée sur une technique similaire. Ils utilisent des solutions non perturbées dans la formule de réciprocité pour construire des transformées de Fourier spatiales des coefficients inconnues, l'unicité est obtenue ensuite à l'aide d'estimations des transformées à haute et basse fréquence.

Il est important de remarquer, que la connaissance a priori de la symétrie matérielle (élasticité isotrope) a éliminé complètement la non-identification mentionnée dans l'exemple de la section précédente et que l'identification se fait par une information portée par l'énergie de déformation du corps.

A partir de ces remarques concernant l'élasticité isotrope et de la technique utilisée pour la reconstruction numérique des modules élastiques dans le cas isotrope [18] et anisotrope [19] on va formuler, sans démonstration, une conjecture d'identifiabilité pour élasticité anisotrope.

Avant d'énoncer la conjecture on va anticiper la technique numérique de reconstruction, qui va être présentée dans le chapitre suivant. La méthode de résolution est basée sur la minimisation de la distance en loi de comportement, une fonctionnelle dépendant des modules élastiques, déformations et contraintes qui à la dimension physique de l'énergie. Dans la minimisation de cette fonctionnelle on s'est rendu compte, que le rôle essentiel n'est pas joué par les coefficients C_{ijkl} du tenseur élastique mais par les modules élastiques propres (ou modules de Kelvin). Les modules propres $c_{(k)}$, $k = 1, 6$ sont les valeurs propres du tenseur d'élasticité \mathbf{C} considéré comme application linéaire sur un espace vectoriel 6-dimensionnel (voir l'annexe A.1). Les tenseurs propres vont correspondre aux vecteurs propres. Dans le cas de l'élasticité isotrope les modules propres sont le module de déformation volumique et le module de cisaillement et les tenseurs propres correspondent à la direction sphérique respectivement déviatorique de l'espace tensoriel. En utilisant les modules propres $c_{(k)}$ et les tenseurs propres $\mathbf{N}^{(k)}$ (tenseurs symétriques d'ordre 2, avec $\mathbf{N}^{(k)} \cdot \mathbf{N}^{(k)} = 1$) le tenseur d'élasticité s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^6 c_{(k)} \mathbf{N}^{(k)} \otimes \mathbf{N}^{(k)}$$

S , le nombre minimum des modules élastiques caractérisant un matériau anisotrope s'écrit alors $S = K + M + C$ ($S \leq 21$), où K ($K \leq 6$) est le nombre des modules propres distinctes, M ($K \leq 12$) est le nombre des distributeurs élastiques et C ($C \leq 3$) est le nombre de paramètres d'orientation (voir [23] et l'annexe A.1). Les distributeurs élastiques sont des rapports des extensions relatives dans certaines directions et peuvent être considérés comme des généralisations du coefficient de Poisson. Ils sont complètement déterminées par : $tr \mathbf{N}^{(k)}$ et $tr \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{N}^{(k)}$, $k = 1, 6$. Les paramètres d'orientation sont directement associés avec un système de coordonnées.

Si on utilise les modules et les tenseurs propres pour exprimer l'énergie (ou la distance en loi de comportement), on obtient une expression dans laquelle les modules propres apparaissent explicitement, tandis que les distributeurs élastiques et les paramètres d'orientation restent cachés dans les tenseurs propres.

Tenant compte du rôle joué par l'énergie dans les résultats d'unicité, ainsi des considérations précédentes sur les modules élastiques propres, on peut formuler la conjecture de manière suivante :

Si on connaît la symétrie matérielle et les tenseurs propres (ou les distributeurs élastiques et les paramètres d'orientation) d'un corps élastique anisotrope, la distribution intérieure des modules propres c_k est complètement déterminée par l'application DN ou $\Lambda_{\mathbf{C}}$

La démonstration d'une telle affirmation nécessite probablement des techniques mathématiques poussées (relaxation, convergence G), comme le montrent les résultats analogues [69, 43] dans le problème d'identification électrique.

On rappelle maintenant que les résultats d'unicité discutés dans cette section s'appliquent aussi pour le problème spectral inverse, dans les conditions précises dans la section 1.4. Ça veut dire que dans le cas isotrope le spectre de vibrations propres du corps détermine complètement tous les modules élastiques, tandis que dans le cas anisotrope on postule seulement la détermination des modules élastiques propres à partir du spectre des vibrations propres.

1.6 Résultats de stabilité

Le problème d'identification se propose de reconstruire la distribution des modules élastiques \mathbf{C} à partir de l'application DN , $\Lambda_{\mathbf{C}}$. Mieux, du point de vue pratique on demande que les modules reconstruits donnent une "bonne" approximation des modules réels dans les problèmes élastiques directs associés. Répondre à cette question équivaut à rechercher la stabilité (continuité) de l'application $\Lambda_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$. On va voir à l'aide des exemples que cette continuité est faible, donc que des petites

perturbations de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ donnent des grandes perturbations pour \mathbf{C} . Autrement dit les erreurs des mesures peuvent être amplifiées par des erreurs numériques. Ceci est provoqué par les propriétés de lissage des opérateurs elliptiques, qui assurent que des oscillations rapides dans les paramètres (les modules élastiques dans notre cas) sont atténuées dans les solutions directes [1, 40, 57].

Cette faible continuité (ou instabilité) de la solution du problème inverse le situe parmi les problèmes mal posés au sens de Hadamard [71]. Le caractère mal posé du problème d'identification va être mis en évidence en formulant le problème à l'aide de la relation de réciprocité comme équation de Fredholm de première espèce. Il est connu [73, 71] que les équations intégrales de Fredholm de première espèce ont un caractère mal posé.

1.6.1 Exemples 1D

Un exemple unidimensionnel [40] peut illustrer le phénomène de problème mal posé. Soit l'équation elliptique :

$$\operatorname{div} a \nabla u = 1 \quad (1.51)$$

sur l'intervalle $[0, \pi]$. Une solution 'non perturbée' est évidemment :

$$a(x) = \frac{1}{2} \quad u(x) = x^2 \quad (1.52)$$

Considérons maintenant la suite des solutions 'perturbées' :

$$a_N(x) = \frac{1}{2 + \cos Nx} \quad u_N(x) = x^2 + \frac{x}{N} \sin Nx + \frac{1}{N^2} \cos Nx \quad N \in \mathbf{N}^* \quad (1.53)$$

Pour chaque $N \in \mathbf{N}^*$ on peut vérifier que les conditions aux limites de type Neumann coïncident :

$$(au')(0) = (a_N u'_N)(0) = 0 \quad (au')(\pi) = (a_N u'_N)(\pi) = \pi \quad (1.54)$$

Pour les conditions aux limites de type Dirichlet, on a les convergences suivantes, quand $N \rightarrow \infty$:

$$u_N(0) = \frac{1}{N^2} \rightarrow u(0) = 0 \quad u_N(\pi) = \pi^2 + \frac{1}{N^2} \rightarrow u(\pi) = \pi^2 \quad (1.55)$$

De plus pour chaque $x \in [0, \pi]$ on a (voir fig. 1.6.1) :

$$u_N(x) \rightarrow u(x) \quad \text{si } N \rightarrow \infty \quad (1.56)$$

Mais a_N ne converge pas vers a , ni ponctuellement, ni en L^2 (voir fig. 1.6.1).

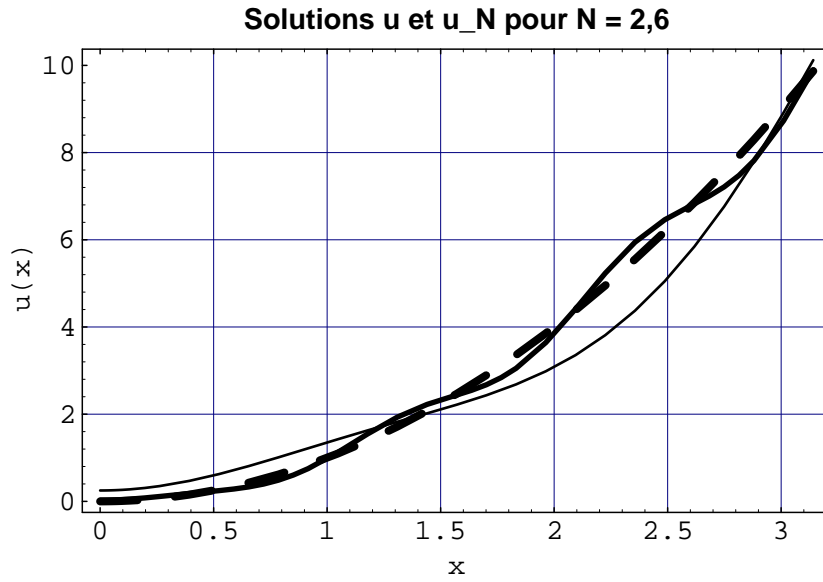


FIG. 1.4 – Equation $\operatorname{div} a \nabla u = 1$: Convergence des solutions u_N (lignes continues $N = 2, 6$) vers la solution u (en tirets)

Cet exemple peut être traduit en élasticité. Considérons pour cela une sphère creuse de rayon intérieur r_1 et extérieur r_2 . On suppose qu'elle est élastique isotrope de modules de Lamé λ et μ .

Pour des chargements à symétrie sphérique l'équation d'équilibre se réduit à l'équation suivante pour le déplacement u_r :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right) - \frac{\mu'}{r} u_r = 0 \quad (1.57)$$

On considère que toutes les fonctions sont fonctions du rayon r .

Une solution 'non perturbée' est :

$$u_r(r) = 1 \quad \mu(r) = \mu_0 + r^2 \quad \lambda(r) = \frac{1}{2} - 2\mu(r) \quad (1.58)$$

La suite des solutions 'perturbées' devient dans ce cas pour chaque $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_r^N(r) &= 1 + \frac{1}{Nr} \sin Nr + \frac{1}{N^2 r^2} \cos Nr \\ \mu^N(r) &= \mu_0 + \int_{r_1}^{r_2} \frac{r \, dr}{1 + \frac{1}{Nr} \sin Nr + \frac{1}{N^2 r^2} \cos Nr} \\ \lambda^N(r) &= \frac{1}{2 + \cos Nr} - 2\mu^N(r) \end{aligned} \quad (1.59)$$

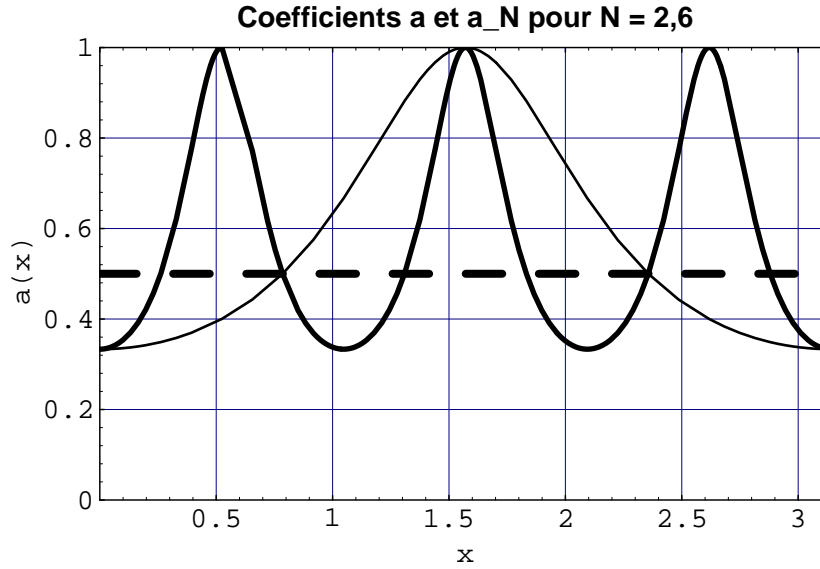


FIG. 1.5 – Equation $\operatorname{div} a \nabla u = 1$: Non-convergence des paramètres a_N (lignes continues $N = 2, 6$) vers le paramètre a (en tirets)

On observe que pour $N \rightarrow \infty$ on a les convergences ponctuelles suivantes (voir fig. 1.6.1, 1.6.1) :

$$\begin{aligned} u_r^N(r) &\longrightarrow u_r(r) \\ \mu^N(r) &\longrightarrow \mu(r) \end{aligned} \quad (1.60)$$

Ceci implique aussi la convergence des valeurs conditions aux limites perturbées vers les valeurs de conditions aux limites non perturbées. Mais par contre la suite des coefficients perturbés λ^N ne converge pas vers le coefficient non perturbé λ (voir fig. 1.6.1).

Cet exemple n'est pas réaliste du point de vue mécanique, mais il s'agit seulement de mettre en évidence le caractère mal posé du problème d'identification des modules élastiques.

On a vu sur ces exemples unidimensionnels que pour des équations elliptiques on peut perturber une solution et le coefficient correspondant, en gardant les solutions perturbées et non perturbées proches, mais en perturbant complètement les coefficients des équations.

On se rend bien compte des difficultés qui apparaissent quand on se propose de reconstruire le coefficient d'une équation elliptique à partir des valeurs aux limites, ce qui est en effet le problème d'identification qu'on s'est proposé de résoudre.

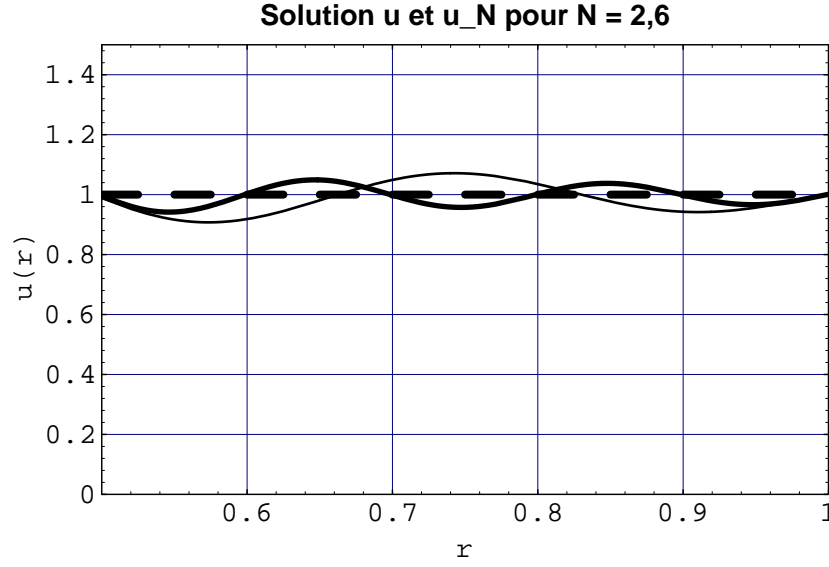


FIG. 1.6 – Elasticité sphère creuse : Convergence des déplacements u_r^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers la solution u_r (en tirets)

1.6.2 Equation de Fredholm

Regardons une seconde fois les équations de réciprocité (1.13) et (1.15) :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 \delta \mathbf{C} \nabla \mathbf{v}_0 dx = \int_{\partial \Omega} \mathbf{u}_0 \Lambda_{\mathbf{C}_0} [\delta \mathbf{C}] (\mathbf{v}_0) ds \quad (1.61)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \delta \mathbf{C} \nabla \mathbf{v}_0 dx = - \int_{\partial \Omega} [\mathbf{u} \Lambda_{\mathbf{C}_0} (\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0 \Lambda_{\mathbf{C}} (\mathbf{u})] ds \quad (1.62)$$

Si on prend par exemple comme déplacement auxiliaire $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la solution élémentaire de Kelvin : réponse en \mathbf{x} de l'espace infini de tenseur d'élasticité non perturbée \mathbf{C}_0 à une force ponctuelle unitaire exercée en \mathbf{y} et de direction k ; cela conduit à :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{C} \nabla \mathbf{x} \mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dx = H(\mathbf{y}) \quad (1.63)$$

pour l'équation de réciprocité linéarisée, et pour l'équation non linéarisée à :

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{x} \mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dx = H(\mathbf{y}) \quad (1.64)$$

Avec :

$$H(\mathbf{x}) = - \int_{\partial \Omega} [(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y})) (\boldsymbol{\Sigma}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Lambda_{\mathbf{C}} (\mathbf{u})(\mathbf{x}))] ds(\mathbf{x}) \quad (1.65)$$

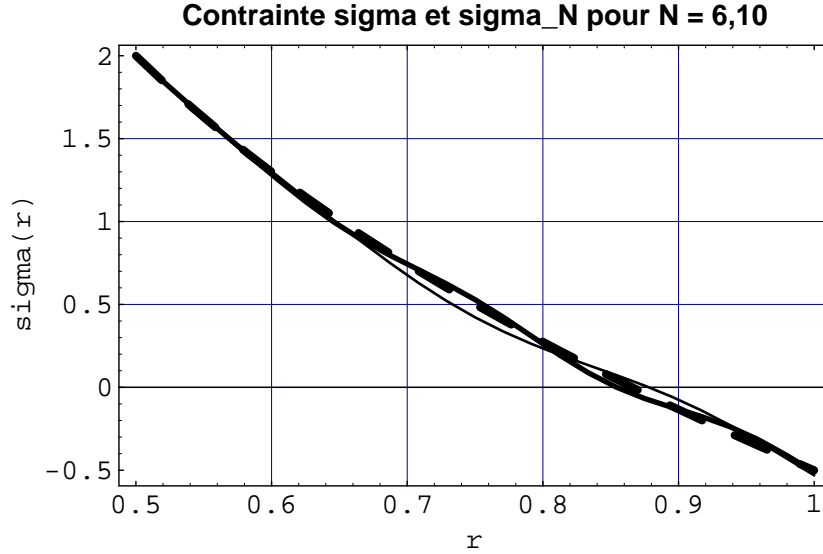


FIG. 1.7 – Elasticité sphère creuse : Convergence des contraintes σ_{rr}^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers la contrainte σ_{rr} (en tirets)

On a obtenu donc deux équations intégrales sur l'inconnue $\delta\mathbf{C}$. Le terme $H(\mathbf{y})$ est entièrement connu puisque sur la frontière $\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}$ est le déplacement mesuré et $\Lambda_{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}$ est la force mesurée (la présence du terme $\mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{y}))$ provient d'un traitement de la singularité en $\|y - x\|^{-2}$, donc non intégrable sur $\partial\Omega$, du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}_0 \nabla \mathbf{x} \mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). On remarque que (1.64) est non linéaire, parce que le déplacement \mathbf{u} , solution du problème perturbé, dépend de la fonction inconnue $\delta\mathbf{C}$. Par contre (1.63) est linéaire (exactement la linéarisation de (1.64)), elle fait intervenir le déplacement \mathbf{u}_0 , solution du problème non perturbé, qui ne dépend pas de $\delta\mathbf{C}$.

Les équations (1.63) et (1.64), parfois qualifiées d'*équations d'observation*, ont la structure d'équations intégrales de Fredholm de première espèce, respectivement linéaire et non linéaire en l'inconnue $\delta\mathbf{C}$. Ce type d'équation apparaît dans la modélisation de très nombreux problèmes inverses. Il est bien connu que les équations intégrales de première espèce sont *mal posées*. Indépendamment des questions d'existence et d'unicité de leur solution $\delta\mathbf{C}$, elles présentent une très grande sensibilité aux données : une petite perturbation des valeurs mesurées de $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$ induit une détérioration considérable du $\delta\mathbf{C}$ reconstruit, et ce phénomène s'aggrave avec la finesse de la discrétisation employée [71, 73]. Cette pathologie affecte l'équation linéarisé (1.63) et ne peut qu'être aggravée si on considère l'équation non linéaire (1.64), qu'on serait amené à résoudre par linéarisations successives [72].

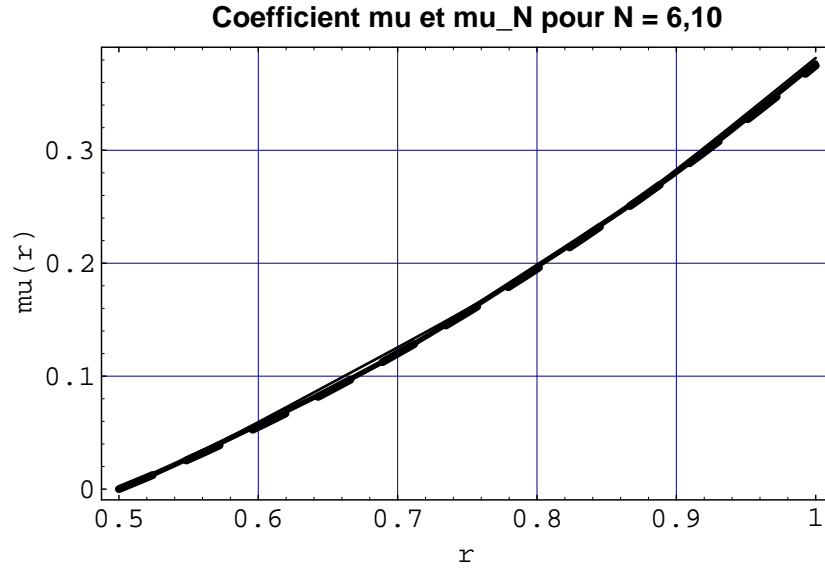


FIG. 1.8 – Elasticité sphère creuse : Convergence du coefficient μ^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers le coefficient μ (en tirets)

1.7 Sélection des charges à appliquer

Dans un certain sens on se pose la question : quels chargements faut-il appliquer sur la frontière d'un solide pour distinguer entre deux distributions des modules élastiques. La question qui suit est de savoir si un tel chargement existe. Dans la suite on se propose seulement d'indiquer un chemin théorique possible en supposant que toutes les conditions d'existence des solutions pour les problèmes d'identification sont satisfaites.

Avant de répondre à une telle question, il faut définir ce qu'on attend du *meilleur* chargement qui doit distinguer entre deux distributions de modules élastiques \mathbf{C} et \mathbf{L} . Par chargement on va comprendre dans ce qui suit une distribution de forces de norme unitaire sur la frontière, qu'on suppose auto-équilibrée pour assurer l'existence de la solution du problème direct. La norme du chargement φ est définie par :

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \varphi \, ds \quad (1.66)$$

Le besoin de normaliser les chargements vient de la linéarité du problème d'élasticité direct.

On va dire que φ , avec $\|\varphi\| = 1$, est le chargement qui distingue le mieux entre les distributions élastiques \mathbf{C} et \mathbf{L} s'il maximise, parmi tout chargement, la distance entre les déplacements en surface lorsqu'il est appliqué à la surface des deux solides

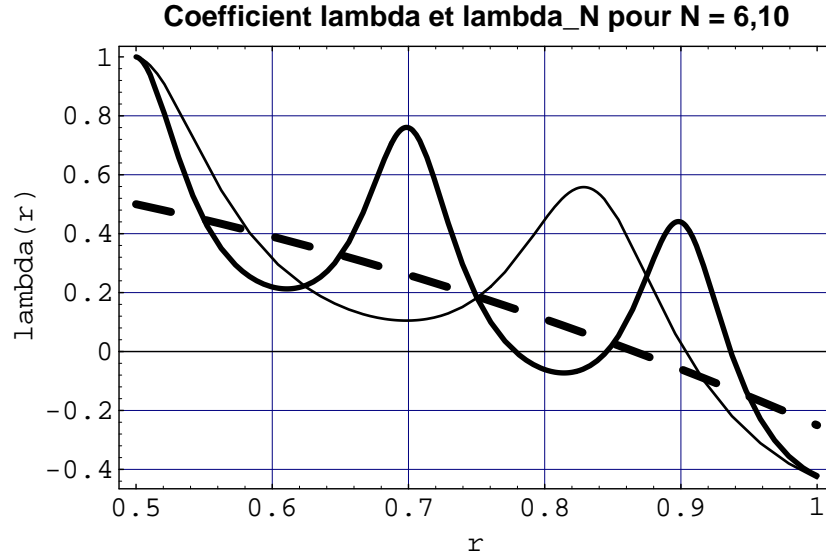


FIG. 1.9 – Elasticité sphère creuse : Convergence du coefficient λ^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers le coefficient λ (en tirets)

de tenseur d'élasticité \mathbf{C} et \mathbf{L} , donc si :

$$\|\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi) - \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi^*)\| = \max_{\|\varphi^*\|=1} \|\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi^*) - \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}(\varphi^*)\| \quad (1.67)$$

Comme $\Lambda_{\mathbf{C}}$ est un opérateur auto-adjoint, et donc $\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}$ est aussi auto-adjoint il en résulte que le meilleur chargement maximise aussi l'expression équivalente suivante :

$$\int_{\partial\Omega} \varphi^* [\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1} - \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}]^2 (\varphi^*) ds \quad (1.68)$$

L'opérateur $D = [\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1} - \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}]^2$ est compact, auto-adjoint (voir [33, 34, 35]) et possède un ensemble complet des fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, et valeurs propres $d_1^2 \geq d_2^2 \geq d_3^2 \geq \dots \geq 0$. Ces fonctions et valeurs propres sont donc des solutions des équations :

$$D\varphi = d\varphi \quad (1.69)$$

et respectivement :

$$D^2\varphi = d^2\varphi \quad (1.70)$$

Utilisant le principe de min-max (voir [21]), il en résulte que les meilleures forces pour distinguer entre les distributions de tenseurs d'élasticité \mathbf{C} et \mathbf{L} sont les fonctions propres de D^2 correspondantes à la plus grande valeur propre d_1^2 .

On considère maintenant que pouvoir faire des mesures de précision ϵ pour une distribution de forces φ de norme unitaire donnée, équivaut à pouvoir mesurer des différences plus grandes que ϵ entre les déplacements correspondants, lorsque la force est appliquée sur les deux structures. Cela revient à écrire l'inégalité :

$$\delta(\varphi) = \|[\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1} - \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}](\varphi^*)ds\| > \epsilon \quad (1.71)$$

Pour une fonction propre de D , φ_j , on a :

$$\delta(\varphi_j) = |d_j| \quad (1.72)$$

Si toutes les valeurs propres sont plus petites que la précision des mesures :

$$\epsilon > d_1^2 \geq d_2^2 \geq d_3^2 \geq \dots \geq 0 \quad (1.73)$$

il est évident qu'on n'est pas capable de 'sentir' les différences entre les deux distributions. Donc seules les premières fonctions propres correspondantes aux valeurs propres plus grandes que ϵ :

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k \geq \epsilon \geq d_{k+1} \dots \geq 0$$

peuvent nous fournir du point de vue pratique une certaine information.

Calculer la meilleure force qui distingue entre deux distributions de tenseurs d'élasticité donnés se réduit donc à un problème des valeurs propres pour la différence des inverses des applications DN correspondantes aux deux tenseurs d'élasticité.

Si on résout ce problème dans une formulation éléments finis, ceci revient à calculer la matrice de rigidité des applications DN (qui en langage éléments finis sont les rigidités du corps considéré comme super-élément), et à calculer après les vecteurs et les valeurs propres d'une matrice.

Un autre moyen de résolution sera une procédure itérative utilisant la propriété de compacité de D . Pour le problème électrique équivalent, un algorithme de ce type est décrit en [34].

1.8 Conclusion

Il apparaît que dans le problème d'identification de la distribution interne des modules élastiques les applications Dirichlet-Neumann et de l'énergie jouent un rôle essentiel. La comparaison avec le problème d'identification électrique a mis en évidence des similitudes (i.e. équations elliptiques) et des différences (i.e. caractère vectoriel des équations et tensoriel des inconnues) entre les deux problèmes.

La reconstruction pratique des modules élastiques directement à partir des applications de Dirichlet-Neumann ou d'énergie semble difficile ou impossible. L'absence de solutions explicites en élasticité pour des domaines finis nous amène à étudier

l'approche variationnelle de Kohn et Vogelius [43, 39] et de la transposer dans le cas élastique. L'originalité de la démarche que nous présentons dans le chapitre suivant est de mettre directement en évidence les modules élastiques dans l'approche variationnelle (erreur en loi de comportement) par le biais des modules élastiques propres, ceci permettant d'étudier l'identification pour l'élasticité isotrope ainsi que pour le cas anisotrope.

Chapitre 2

La Méthode de résolution

Dans ce chapitre nous présentons en détail une approche originale pour résoudre le problème d'identification des modules élastiques à partir d'un nombre fini de mesures simultanées force-déplacement sur la frontière (section 2.1). Notre approche est fondée sur la minimisation de l'erreur en loi de comportement (section 2.2) et utilise la décomposition des champs intervenant sur des bases liées aux modules élastiques propres (les valeurs propres du tenseur de l'élasticité). Ensuite (section 2.3), nous proposons deux algorithmes de minimisation et démontrons rigoureusement la convergence de notre approche pour un problème simplifié (section 2.4).

2.1 Le problème pratique de minimisation

Dans le premier chapitre, on a vu que pour identifier les modules élastiques \mathbf{C} on a besoin d'informations sur l'anisotropie et on est supposé connaître parfaitement l'application Dirichlet-Neumann $\Lambda_{\mathbf{C}}$. La connaissance de l'application DN est équivalente à la connaissance sur la frontière de toutes les paires déplacement-force possibles.

D'un point de vue pratique on peut seulement espérer connaître un nombre fini de mesures déplacement-force pour un nombre fini de points de mesure sur la frontière du solide. Pour la simplicité de l'approche variationnelle, on va supposer qu'on est capable d'interpoler les champs entre les points de mesure, et qu'on connaît au départ N couples de champs déplacements-force, $(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\varphi}_i)_{i=1,N}$ sur toute la frontière $\partial\Omega$.

Le problème pratique peut être formulé de la manière suivante :

Pour N mesures données (autrement dit, des paires de champs déplacement-force $(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\varphi}_i)_{i=1}^N$, tels que $\boldsymbol{\varphi}_i = \Lambda_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\xi}_i)$, on recherche une solution :

$$(\mathbf{C}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, \boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N)$$

du système d'équations :

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_i + \nabla^T \mathbf{u}_i), \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \quad i = 1, N \quad (2.3)$$

avec les conditions aux limites :

$$\mathbf{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, N \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}_i \quad i = 1, N \quad (2.5)$$

Examinons maintenant la structure du système ci-dessous en séparant les aspects dynamiques et cinématiques, qui sont des concepts universels, de ce qui ressort de la physique particulière du matériau : l'équation constitutive. Pour les équations de l'élasto-statique, celle-ci est explicitée par le diagramme de Tonti [13] (reproduite dans la figure 2.1). Dans ce diagramme on note à gauche les grandeurs relatives à la dynamique (i.e. le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dérivant du tenseur de Beltrami afin de satisfaire aux équations d'équilibre), et à droite celles relatives à la cinématique (i.e. le champ des déplacements \mathbf{u} dérivant des potentiels de Helmholtz (ϕ, \mathbf{H}) afin de satisfaire aux relations de compatibilité). On remarque aussi que les parties cinématique et dynamique sont régies par des opérateurs différentiels adjoints $-\text{div}$ et $\frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$. Le produit du rotationnel à droite avec celui à gauche rot rot^* étant autoadjoint. Les deux parties adjointes étant reliées par l'équation constitutive.

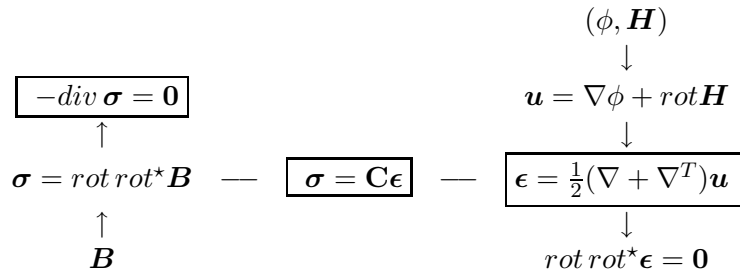


FIG. 2.1 – Diagramme de Tonti en élasto-statique

Dans le cas du problème pratique on applique les mêmes concepts. Les équations et les conditions aux limites se séparent en une partie cinématique (qui caractérise les

champs cinématiquement admissibles) :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_i + \nabla^T \mathbf{u}_i), \quad \mathbf{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi}i, \quad i = 1, N$$

une partie dynamique (qui caractérise les champs statiquement admissibles) :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}_i \quad i = 1, N$$

et en une partie contenant les équations constitutives :

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C}\epsilon_i, \quad i = 1, N$$

Si on définit l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour un déplacement $\boldsymbol{\xi}$ donnée sur $\partial\Omega$ par :

$$CA(\boldsymbol{\xi}) = \{\epsilon | \exists \mathbf{u}, \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \text{ on } \Omega \text{ and } \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi} \text{ on } \partial\Omega\}$$

et l'ensemble des champs statiquement admissibles pour une force $\boldsymbol{\varphi}$ donné sur $\partial\Omega$ par :

$$SA(\boldsymbol{\varphi}) = \{\boldsymbol{\sigma} | \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ on } \Omega \text{ and } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi} \text{ on } \partial\Omega\}$$

Le problème pratique d'identification peut être reformulé de manière suivante :

Trouver la distribution intérieure des modules élastiques $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ et N triplets de champs de déplacements, déformations, et contraintes, $(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}), \epsilon_i(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}))_{i=1,N}$, satisfaisant l'équation constitutive sur Ω :

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C}\epsilon_i \quad i = 1, N \quad (2.6)$$

avec :

$$\epsilon_i \in CA(\boldsymbol{\xi}_i) \quad \boldsymbol{\sigma}_i \in SA(\boldsymbol{\varphi}_i) \quad i = 1, N \quad (2.7)$$

Cette formulation suggère de chercher la solution parmi les tenseurs d'élasticité admissibles (définis positifs et ayant les symétries désirées) et des champs cinématiquement et statiquement admissibles minimisant une erreur (définie ultérieurement) sur l'équation constitutive.

2.2 L'erreur en loi de comportement

Suite aux considérations de la section précédente on va définir une erreur sur l'équation constitutive, l'erreur en loi de comportement (ELC) :

$$I(\mathbf{C}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N, \boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}_i - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \epsilon_i|^2 dx \quad (2.8)$$

qui va être minimisé dans la suite avec les impératives suivantes :

$$\epsilon_i \in CA(\xi_i) \quad \text{et} \quad \sigma_i \in SA(\varphi_i) \quad i = 1, N$$

L'intégrant ¹ a été choisi de la forme :

$$|\mathbf{C}_\gamma^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}_\gamma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}|^2$$

plutôt que de la forme :

$$|\mathbf{C}_\gamma^{-1} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\epsilon}|^2 \quad \text{ou} \quad |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}_\gamma \boldsymbol{\epsilon}|^2$$

à cause de sa dimension physique d'énergie. En outre il respecte la dualité entre les champs cinématiquement et statiquement admissibles, conservant la symétrie entre la déformation et la contrainte.

En élasticité, cette fonctionnelle a été introduite avec un intégrant sous la forme équivalente :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon})$$

par Ladevèze and Leguillon [47] pour l'étude des erreurs en éléments finis, une des propriétés de l'ELC étant la localisation spatiale de l'erreur en calcul éléments finis.

On va illustrer cet aspect par calcul en éléments finis de torsion d'un cylindre d'aluminium contenant en peau une inclusion de cuivre (voir fig. 2.2). Les calculs ont été effectués dans l'ordre suivant : à partir d'un angle de rotation donné on a calculé : le déplacement en surface et la force correspondante en surface du cylindre, ensuite utilisant les données aux limites, (déplacements et forces sur la frontière du cylindre) obtenus auparavant, on a calculé avec un tenseur d'élasticité \mathbf{C} homogène (constant dans le cylindre) un champ de déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

A partir de ces champs, on a représenté dans la figure 2.3 la distribution de l'ELC :

$$|\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}|^2$$

et dans la figure 2.4 le rapport de la distribution de l'ELC sur la distribution d'énergie de déformation :

$$\frac{|\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}|^2}{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}}$$

On remarque d'une part une bonne localisation de l'inclusion de cuivre par l'ELC, et d'autre part l'influence de la distribution d'énergie de déformation des champs avec lesquelles on calcule l'ELC. Pour le calcul de torsion l'énergie est essentiellement concentrée vers la peau du cylindre et les calculs ont montré qu'une inclusion de

¹ \mathbf{C} est symétrique et défini positive, donc $\mathbf{C}^{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}$ sont bien définis. Une démonstration rigoureuse est obtenue par passage de \mathbf{C} en tenseur d'ordre deux, six dimensionnel (notation de Voigt, voir annexe A.1, pour lesquels la fonction racine carré est bien défini.

même volume situé sur l'axe du cylindre n'est pas identifiable par le même calcul (faible variation de l'ELC suite à une faible distribution d'énergie). On va revenir brièvement sur cet aspect lors la discussion des résultats numériques.

La propriété de localisation a ensuite été utilisée par Ladèveze et al. [48] comme un critère de recalage des modèles d'élément finis à partir de mesures vibratoires.

Une fonctionnelle similaire a été utilisée en électrostatique pour la détermination de la distribution intérieure de la conductivité électrique à partir des mesures de potentiel et voltage sur la frontière. Ce problème a été étudié aussi bien d'un point de vue mathématique [43] que de point de vue technique [50].

En revenant à l'élasticité, on va réécrire l'ELC d'une manière plus adaptée à la minimisation. Une courte discussion sur les propriétés de convexité de l'ELC va être faite plus loin.

Le premier pas consiste à développer l'intégrant et à appliquer pour le terme $\epsilon_i \sigma_i$ le théorème de l'énergie et les conditions au limites :

$$I(\mathbf{C}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_i \mathbf{C}^{-1} \sigma_i + \epsilon_i \mathbf{C} \epsilon_i dx - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \xi_i \varphi_i dx$$

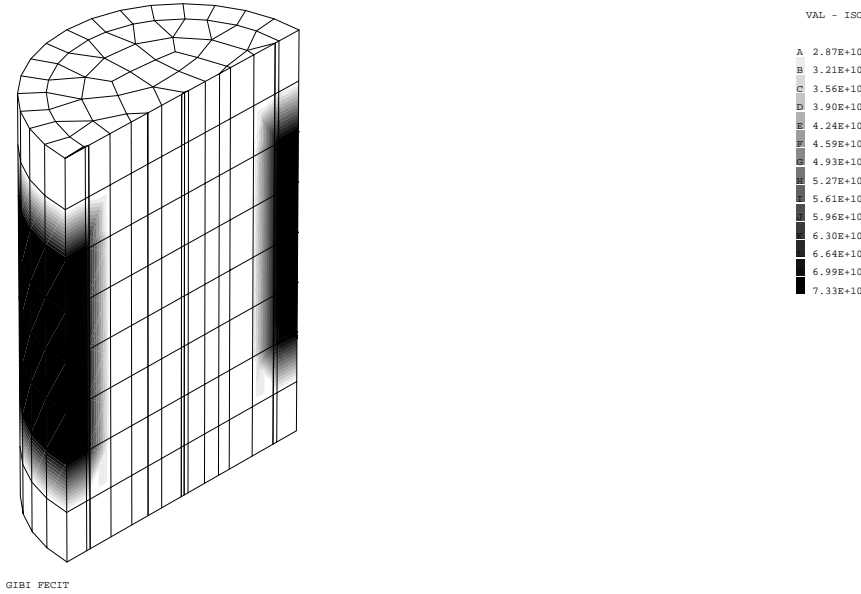


FIG. 2.2 – La distribution du module de cisaillement G pour le cylindre en torsion

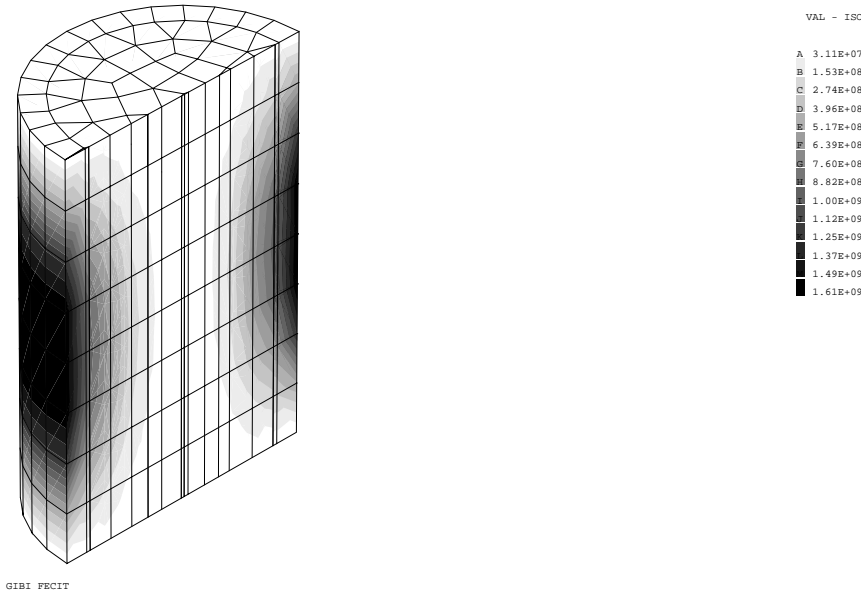


FIG. 2.3 – Distribution de l'erreur en loi de comportement pour un cylindre en torsion

Comme ξ_i et φ_i , sont le déplacement et la force correspondants à la $i^{\text{ème}}$ mesure, on remarque que la seule partie pouvant jouer un rôle dans la minimisation de I est :

$$J(\mathbf{C}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_i \mathbf{C}^{-1} \sigma_i + \epsilon_i \mathbf{C} \epsilon_i dx$$

On observe que J est la somme des énergies de déformation exprimées en fonction des déformations ou des contraintes, ce qui permet à \mathbf{C} fixé une minimisation simple en σ_i ou ϵ_i .

Dans le problème d'identification électrique la conductivité électrique [39, 43], (i.e. l'équivalent de \mathbf{C}), est un scalaire et donc la minimisation dans la direction de la conductivité électrique devient explicite. Dans le cas élastique (2.9) ceci n'est pas évident car \mathbf{C} est une variable tensorielle.

Dans la suite, on va utiliser une technique fondée sur la décomposition des tenseurs sur la base des tenseurs propres afin de s'affranchir de cette difficulté. Le cas de l'élasticité isotrope va être discuté en premier, suivi par le cas de l'élasticité anisotrope.

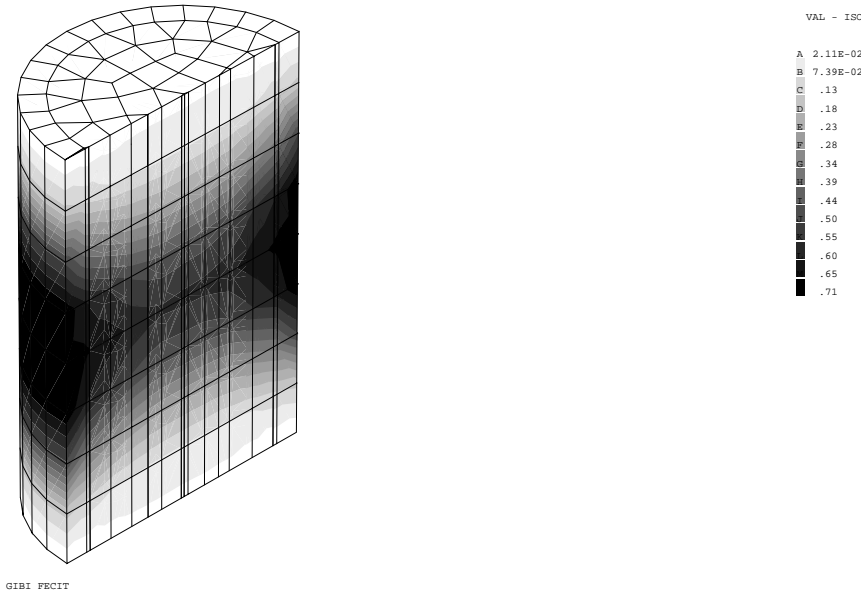


FIG. 2.4 – Distribution du rapport ELC sur énergie de déformation pour un cylindre en torsion

2.2.1 Elasticité isotrope

En élasticité isotrope, le tenseur d'élasticité s'écrit généralement sous la forme :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

et l'identification porte sur les modules de Lamé λ et μ .

Dans ce qui suit, on va décomposer chaque tenseur \mathbf{A} en partie sphérique $1/3(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{I}$ et partie déviatorique $\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - 1/3(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{I}$. En même temps on va représenter le tenseur d'élasticité \mathbf{C} , à l'aide du module de déformation volumique η et du module de cisaillement ω :

$$\eta = 3\lambda + 2\mu \quad \omega = 2\mu \quad (2.9)$$

Avec ces notations la fonctionnelle J , à minimiser, se transforme en :

$$J(\eta, \omega, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{6} \int_{\Omega} \eta^{-1} (\text{tr} \sigma_i)^2 + \eta (\text{tr} \epsilon_i)^2 \right] dx + \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega^{-1} \overset{\circ}{\sigma}_i \cdot \overset{\circ}{\sigma}_i + \omega \overset{\circ}{\epsilon}_i \cdot \overset{\circ}{\epsilon}_i \right] dx \quad (2.10)$$

Les minimisations de J par rapport à η et ω sont alors explicites et les minima donnés par :

$$[\eta(\mathbf{x})]^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (tr \boldsymbol{\sigma}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (tr \boldsymbol{\epsilon}_i)^2} \quad \text{et} \quad [\omega(\mathbf{x})]^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}_i \cdot \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}_i}{\sum_{i=1}^N \overset{o}{\boldsymbol{\epsilon}}_i \cdot \overset{o}{\boldsymbol{\epsilon}}_i} \quad (2.11)$$

Deux propriétés ont permis la décomposition de J :

- Les parties sphérique et déviatorique sont orthogonales, au sens du produit tensoriel doublement contracté, qui est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des tenseur d'ordre 2 symétriques.
- L'équation constitutive se réduit alors à une loi de proportionnalité entre les parties sphériques (respectivement déviatoriques) de la déformation et de la contrainte, avec le facteur η (respectivement ω) :

$$\frac{1}{3}(tr \boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} = \eta \frac{1}{3}(tr \boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad \text{et} \quad \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} = \omega \overset{o}{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.12)$$

2.2.2 Elasticité anisotrope

Dans le cas anisotrope on peut, en considérant les tenseurs et modules propres relatifs à \mathbf{C} , retrouver ces propriétés des parties sphérique et déviatorique (explicitées en élasticité isotrope).

Le tenseur d'élasticité \mathbf{C} , est un tenseur du quatrième ordre sur \mathbf{R}^3 . Ces propriétés de symétrie permettent aussi de le considérer comme un tenseur de deuxième ordre sur \mathbf{R}^6 . En le considérant comme tenseur d'ordre deux sur \mathbf{R}^6 défini positif on peut calculer ses valeurs propres et ces vecteurs propres. On appellera *modules propres* les valeurs propres, et *tenseurs propres* la projection des vecteurs propres (de l'espace 6-dimensionnel) dans l'espace tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbf{R}^3 . Une présentation élargie de ces définitions est présenté dans l'annexe A.1.

Si on note par $\mathbf{A}^{(k)}$, $k = 1, K$ les projections d'un tenseur A sur la base des tenseurs propres, et par c_k , $k = 1, 6$ les modules élastiques propres du tenseur d'élasticité \mathbf{C} correspondants, on obtient les propriétés souhaitées, à savoir :

- $\mathbf{A}^{(k)} \cdot \mathbf{A}^{(j)} = 0$ si $k \neq j$, et
- L'équation constitutive $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$ s'écrit alors sous la forme de 6 équations découplées :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = c_k \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} \quad k = 1, 6$$

Comme les modules élastiques propres sont les valeurs propres d'un tenseur d'ordre deux de \mathcal{T}^6 , on a au maximum 6 valeurs propres différentes, et donc $K \leq 6$. En utilisant maintenant les tenseurs propres et les modules élastiques propres comme variables pour la fonctionnelle I , représentant l'ELC, on a :

$$I(c_1, \dots, c_6, \boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_N, \boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} |c_k^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}_i^{(k)} - c_k^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_i^{(k)}|^2 dx. \quad (2.13)$$

La fonctionnelle J , analogue à (2.10), devient :

$$J(c_1, \dots, c_6, \boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_N, \boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} [c_k^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i^{(k)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^{(k)} + c_k \boldsymbol{\epsilon}_i^{(k)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i^{(k)}] dx \quad (2.14)$$

et la minimisation explicite de J dans les directions des modules élastiques propres donne, conforme (2.11), une expression explicite de la distribution intérieure des modules élastiques propres :

$$c_k(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}_i^{(k)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\epsilon}_i^{(k)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i^{(k)}} \quad k = 1, 6 \quad (2.15)$$

Pour la minimisation de l'ELC, qui se réduit à la minimisation de J défini par (2.14), on peut maintenant appliquer des méthodes similaires avec celles appliquées par Kohn et McKenney [39] dans le problème d'identification électrique. Nous allons maintenant discuter en détail la méthode implicite à directions alternées (IDA) et la méthode de Newton modifiée (MN).

2.2.3 Quelques remarques sur les propriétés mathématiques de ELC

Les considérations antérieures ont montré que l'ELC exprimée par la fonctionnelle I est convexe pour chacun des ces arguments : la déformation $\boldsymbol{\epsilon}_i$, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_i$, ou le module élastique propre c_k . Dans cette section on va montrer à l'aide d'un exemple que I n'est pas globalement convexe.

En suivant le raisonnement de Kohn et Vogelius [43] fait dans le cas électrique, il est intéressant de ne pas considérer l'ELC sous la forme :

$$I = \int_{\partial\Omega} \imath(\mathbf{C}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) dx$$

mais sous la forme

$$E = \int_{\partial\Omega} e(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) dx$$

obtenue après une minimisation explicite dans les directions des modules élastiques propres c_k . Pour simplifier les notations, on va considérer une seule mesure. L'intégrant devient alors :

$$e(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\mathbf{C}} |\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}|^2 \quad (2.16)$$

Après utilisation de l'équation (2.15) on obtient :

$$e(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=1}^6 2[|\boldsymbol{\sigma}^{(k)}| |\boldsymbol{\epsilon}^{(k)}| - \boldsymbol{\sigma}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(k)}]$$

où $|\mathbf{A}|$ est la norme du tenseur \mathbf{A} .

Dans le cas de l'élasticité anisotrope on obtient :

$$e(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = 2(|\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}| |\overset{o}{\boldsymbol{\epsilon}}| - \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{o}{\boldsymbol{\epsilon}}) + \frac{2}{3}(|tr \boldsymbol{\sigma}| |tr \boldsymbol{\epsilon}| - (tr \boldsymbol{\sigma})(tr \boldsymbol{\epsilon}))$$

Regardons maintenant e sur le segment $((1-t)\boldsymbol{\epsilon}_a, t\boldsymbol{\sigma}_a)$ pour $t \in [0, 1]$ avec :

$$\boldsymbol{\epsilon}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un simple calcul donne :

$$e((1-t)\boldsymbol{\epsilon}_a, t\boldsymbol{\sigma}_a) = 4(1-t)t a^2$$

En dérivant ce résultat deux fois par rapport à t on a :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = -8a^2 < 0$$

ce qui signifie que e est *concave* sur le segment défini précédemment.

Une premier pas dans la convexification de l'ELC sera de la mettre sous forme relaxée. Dans le cas électrique *isotrope*, Kohn et Vogelius [43] ont donné une démonstration mathématiquement rigoureuse montrant que la relaxation de l'ELC est obtenue en acceptant dans l'intégrant correspondant à (2.16) des conductivités anisotropes. De point de vue pratique les résultats numériques obtenus avec la forme relaxée n'ont pas été convainquants [39].

En élasticité isotrope ceci revient à remplacer dans la minimisation :

$$e(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{(\lambda, \mu)} |\mathbf{C}_{(\lambda, \mu)}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}_{(\lambda, \mu)}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}|^2$$

par

$$e(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\mathbf{C}} |\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}|^2$$

où \mathbf{C} désigne un tenseur anisotrope. La relaxation permet alors de s'affranchir, pour la minimisation de l'ELC, de la condition d'isotropie portant sur \mathbf{C} .

Une démonstration rigoureuse de ce résultat paraît possible moyennant de techniques mathématique puissantes.

Du point de vue pratique on montre dans le chapitre suivant que l'identification d'une inclusion d'aluminium (matériaux isotrope) à l'aide d'une ELC correspondante à un matériaux à symétrie cubique, n'a pas posée de problèmes particuliers.

2.3 Algorithmes de minimisation

Dans la suite on va présenter deux algorithmes possibles de minimisation correspondants à une méthode implicite à directions alternées (IDA) et une méthode de Newton modifiée (MN).

La méthode *implicite à directions alternées* (IDA) utilise le fait que la minimisation de J , définie dans (2.14), est explicite et simple dans chacune des directions c_k , ϵ_i , σ_i lorsque les autres variables sont fixées. Les modules propres qui minimisent l'ELC pour des valeurs fixées des déformations et des contraintes, sont données par (2.15), la minimisation dans les directions des déformations ou des contraintes étant équivalentes à la résolution d'un problème aux limites élastiques.

En conséquence, on peut définir une itération de la minimisation avec les 3 pas suivantes :

1. avec c_k fixée (par l'itération précédente) résoudre N problèmes de Dirichlet (déplacements imposés) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}) &= \mathbf{0} & \text{in} & \Omega \\ \mathbf{u}_i|_{\partial\Omega} &= \boldsymbol{\xi}_i & \text{on} & \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

2. avec c_k fixée (par l'itération précédente) résoudre N problèmes de Neumann (forces imposées) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}) &= \mathbf{0} & \text{in} & \Omega \\ \mathbf{C}\nabla\mathbf{u}_i|_{\partial\Omega} &= \boldsymbol{\varphi}_i & \text{on} & \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

3. avec $(\epsilon_i)_{i=1}^N$ déterminé par 1 et $(\sigma_i)_{i=1}^N$ déterminé par 2, calculer c_k , $k = 1, K$ en minimisant :

$$G(c_k) = I(c_1, \dots, c_6, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) \quad (2.19)$$

Le dernier pas est trivial, car la minimisation se réduit dans ce cas au calcul explicite donné par la formule (2.15) .

Cette méthode est simple et stable et a l'avantage de réduire la valeur de I à chaque itération.

Le deuxième algorithme, que nous considérons est une méthode de *Newton modifiée* (MN). L'ELC est approximée à chaque pas par une forme quadratique convexe, que l'on minimise. Pour la simplification de l'écriture on introduit les notations :

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) \quad \boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \quad (2.20)$$

En utilisant les notations (2.20), on calcule l'approximation quadratique $I_0 + \delta I_0 + \frac{1}{2}\delta^2 I_0$ de I . Le calcul évalue I au point $c_{(k)} = c_{(k)0} + \delta c_{(k)}$, $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \delta \boldsymbol{\epsilon}$,

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \delta\boldsymbol{\sigma}$ et développe I au deuxième ordre. Les perturbations $\delta\mathbf{u}$ et $\delta\boldsymbol{\sigma}$ sont assujetties à des contraintes :

$$\delta\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \delta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad i = 1, N. \quad (2.21)$$

Les expressions détaillées de l'approximation de $I \approx I_0 + \delta I_0 + \delta^2 I_0$ sont :

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} |c_{(k)0}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}_0^{(k)} - c_{(k)0}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)}|^2 \\ \delta I_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} [(|\boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)}|^2 - \frac{1}{c_{(k)}^2} |\boldsymbol{\sigma}_0^{(k)}|^2) \delta c_{(k)} \\ &\quad + 2c_{(k)0} \boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} + \frac{2}{c_{(k)0}^2} \boldsymbol{\sigma}_0^{(k)} \delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)}] dx \\ \delta^2 I_0 &= \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} [\frac{1}{c_{(k)0}^3} |\boldsymbol{\sigma}_0^{(k)}|^2 \delta c_{(k)}^2 + c_{(k)0} |\delta \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 + \frac{1}{c_{(k)0}} |\delta \boldsymbol{\sigma}|^2 \\ &\quad + 2(\boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} - \frac{1}{c_{(k)}^2} \boldsymbol{\sigma}_0^{(k)} \delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)}) \delta c_{(k)}] dx \end{aligned}$$

En imposant comme contraintes la solution de la minimisation par rapport aux modules élastiques propres :

$$c_{(k)} = \frac{|\boldsymbol{\sigma}^{(k)}|}{|\boldsymbol{\epsilon}^{(k)}|} \quad (2.22)$$

et en considérant le développement de cette relation au premier ordre en $\boldsymbol{\epsilon}^{(k)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$:

$$\delta c_{(k)} = |\boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)}|^{-1} |\boldsymbol{\sigma}_0^{(k)}| (\boldsymbol{\sigma}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)} - c_{(k)}^2 \boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)}) + O(|\delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)}|^2 + |\delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)}|^2)$$

on obtient une nouvelle approximation quadratique $I_0 + \delta I'_0 + \frac{1}{2} \delta^2 I'_0$ de I , avec le même I_0 . Les autres termes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \delta I'_0 &= \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} [c_{(k)0} \boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} + \frac{1}{c_{(k)0}} \boldsymbol{\sigma}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)}] dx \\ \delta^2 I'_0 &= \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} [c_{(k)0} |\boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)}|^2 + \frac{1}{c_{(k)0}} |\delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)}|^2 \\ &\quad - \frac{c_{(k)0}}{|\boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)}|^2} (\boldsymbol{\epsilon}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} - c_{(k)0}^{-2} \boldsymbol{\sigma}_0^{(k)} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)})^2] dx \end{aligned} \quad (2.23)$$

On remarque que le Hessian $\delta^2 I'_0$ n'est pas défini positif. Ceci montre encore un fois les mauvaises propriétés de convexité de l'ELC, telles qu'elles ont été démontrées dans le paragraphe 2.2.3.

Ce terme est régularisable, comme dans le cas électrique [39]. Avec un paramètre de régularisation $0 \leq \epsilon \ll 1$ on a :

$$\begin{aligned} \delta^2 I_0'' = & \sum_{k=1}^6 \int_{\Omega} \left[c_{(k)0} |\epsilon_0^{(k)}|^2 + \frac{1}{c_{(k)}} |\delta \sigma^{(k)}|^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{1 + \epsilon} \frac{c_{(k)0}}{|\epsilon_0^{(k)}|^2} (\epsilon_0^{(k)} \cdot [\delta \epsilon^{(k)} - c_{(k)}^{-2} \delta \sigma^{(k)}])^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

Suite à ces développements une itération de l'algorithme NM devient :

1. actualisation de $(c_{(k)})_{k=1,6}$ à partir de la dernière valeur calculée de $(\epsilon_i)_{i=1,N}^N$, $(\sigma_i)_{i=1,N}^N$ et des équations (2.22).
2. minimisation de $I_0 + \delta I_0' + \frac{1}{2} \delta^2 I_0''$ comme fonction de $\delta \sigma$, $\delta \epsilon$ avec les contraintes (2.21).

2.3.1 Limitations de la méthode de reconstruction

La méthode d'identification des modules élastiques présentée dans les paragraphes précédentes est essentiellement fondée sur la décomposition de l'énergie utilisant les modules élastiques propres et les tenseurs propres. Elle permet une reconstruction directe des modules élastiques propres, avec comme domaine d'application simple les matériaux **isotropes** ou à **symétrie cubique**, pour lesquels les modules élastiques propres sont en bijection avec l'ensemble des modules élastiques. Des exemples numériques d'identification pour ces deux types de matériaux seront fournis dans le chapitre suivant.

Pour d'autres types de symétries matérielles, **orthotropie**, **symétrie tetragonale**, etc., pour lesquelles le nombre des modules propres est inférieur au nombre total des modules élastiques, le problème reste encore ouvert. Il est clair que notre méthode fournit même dans ces cas les modules propres, mais remonter à l'ensemble des modules élastiques est compliqué sinon impossible (voir section 2.2.3).

2.4 Modèle analytique 1-D

Dans cette section on va appliquer la minimisation de l'erreur en loi de comportement à un modèle unidimensionnel.

Il s'agit d'identifier les paramètres géométriques ou élastiques d'une sphère contenant une inclusion sphérique centrée, la sphère étant soumise à des pressions hydrostatiques.

2.4.1 Solutions analytiques aux problèmes directs

On va considérer le problème en symétrie sphérique. Soit une sphère élastique contenant une inclusion sphérique centrée (fig. 2.5) en coordonnées cylindriques

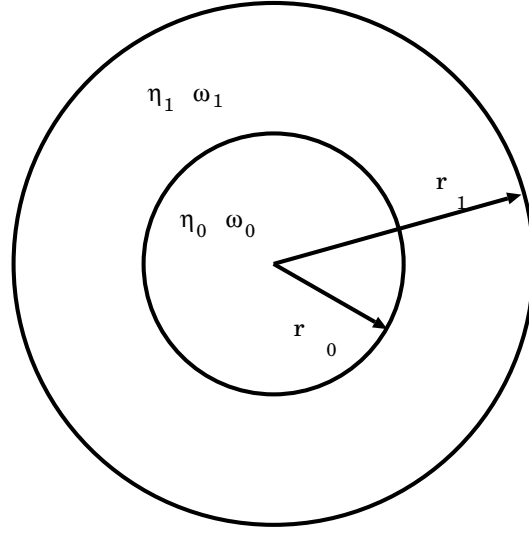


FIG. 2.5 – Inclusion sphérique dans une sphère

(r, θ, ϕ) . Les rayons des deux sphères sont r_1 et r_0 ($r_0 < r_1$), et les modules élastiques sont η_1, ω_1 dans la couche extérieure, respectivement η_0, ω_0 dans l'inclusion.

La seule variable est donc r et la forme générale des déplacements devient :

$$u_r(r) = \begin{cases} a_0 r & r \in [0, r_0] \\ a_1 r + b_1 \frac{1}{r^2} & r \in [r_0, r_1] \end{cases}$$

u_θ et u_ϕ étant identiquement nulles. Les composantes non nulles des contraintes sont :

$$\sigma_{rr}(r) = \begin{cases} \eta_0 a_0 & r \in [0, r_0] \\ \eta_1 a_1 - 2\omega_1 b_1 \frac{1}{r^3} & r \in [r_0, r_1] \end{cases}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\phi\phi}(r) = \begin{cases} \eta_0 a_0 & r \in [0, r_0] \\ \eta_1 a_1 + \omega_1 b_1 \frac{1}{r^3} & r \in [r_0, r_1] \end{cases}$$

Les coefficients a_0^d, a_1^d, b_1^d de la solution en déplacements imposés et les coefficients a_0^f, a_1^f, b_1^f de la solution à forces imposées sont déterminés par les conditions de continuité à l'interface $r = r_0$:

$$u_r(r_0) : a_0 r_0 = a_1 r_0 + b_1 \frac{1}{r_0^2}$$

$$\sigma_{rr}(r_0) : \eta_0 a_0 = \eta_1 a_1 - 2\omega_1 b_1 \frac{1}{r_0^3}$$

et la condition aux limites en déplacements imposés :

$$u_r(r_1) = u_{ext}$$

ou respectivement par la condition aux limites à forces imposées :

$$\sigma_{rr}(r_1) = p_{ext}$$

La résolution des deux systèmes fournit les coefficients correspondants aux déplacements :

$$\begin{aligned} a_0^d &= \frac{(\eta_1 + 2\omega_1) r_1^2 u_{ext}}{-\eta_0 r_0^3 + \eta_1 r_0^3 + \eta_0 r_1^3 + \omega_1 r_1^3} \\ a_1^d &= \frac{(\eta_1 + 2\omega_1) r_1^2 u_{ext}}{-\eta_0 r_0^3 + \eta_1 r_0^3 + \eta_0 r_1^3 + \omega_1 r_1^3} \\ b_1^d &= \frac{(\eta_1 - \eta_0) r_0^3 r_1^2 u_{ext}}{-\eta_0 r_0^3 + \eta_1 r_0^3 + \eta_0 r_1^3 + \omega_1 r_1^3} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ainsi que les coefficients correspondants aux forces imposées :

$$\begin{aligned} a_0^f &= \frac{(\eta_1 + 2\omega_1) p_{ext} r_1^3}{2\eta_0 \omega_1 r_0^3 - 2\eta_1 \omega_1 r_0^3 + \eta_0 \eta_1 r_1^3 + 2\eta_1 \omega_1 r_1^3} \\ a_1^f &= \frac{(\eta_1 + 2\omega_1) p_{ext} r_1^3}{2\eta_0 \omega_1 r_0^3 - 2\eta_1 \omega_1 r_0^3 + \eta_0 \eta_1 r_1^3 + 2\eta_1 \omega_1 r_1^3} \\ b_1^f &= \frac{(\eta_1 - \eta_0) r_0^6 r_1^3 p_{ext}}{2\eta_0 \omega_1 r_0^3 - 2\eta_1 \omega_1 r_0^3 + \eta_0 \eta_1 r_1^3 + 2\eta_1 \omega_1 r_1^3} \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.4.2 Problème d'identification

Le problème d'identification que l'on se pose est de déterminer η_0, η_1, ω_1 à partir de mesures (déplacement radiale - pression) sur la frontière. Dans la discussion on a omis ω_0 , car il n'intervient pas dans les solutions ce qui le rend non-identifiable.

Pour ce problème on connaît seulement la restriction de l'application de DN au cas des chargements à symétrie sphérique.

La relation entre la pression imposée p_{ext} et le déplacement radial correspondant u_{ext} est alors :

$$\Lambda_{\mathbf{C}}(u_{ext}) = p_{ext}$$

Les solutions des problèmes directs ont montré que le rapport déplacement / pression est constant pour toutes les pressions appliquées. L'application Dirichlet-Neumann est alors représentée dans notre problème par un seul paramètre :

$$\ell = \frac{p_{ext}}{u_{ext}} = \frac{2\eta_0 \omega_1 r_0^3 - 2\eta_1 \omega_1 r_0^3 + \eta_0 \eta_1 r_1^3 + 2\eta_1 \omega_1 r_1^3}{-\eta_0 r_0^3 + \eta_1 r_0^3 + \eta_0 r_1^3 + \omega_1 r_1^3}$$

L'identification de η_0, η_1, ω_1 , ou r_0 doit donc se faire à partir de ℓ , et en conséquence on peut identifier seulement un des paramètres inconnus.

Bien sûr, si on connaît l'expression analytique de ℓ donnée dans (2.27), l'identification se réduit à une équation d'inconnue x du type :

$$\ell = \frac{Ax + B}{Cx + D}$$

laquelle est alors évidente.

Dans la suite on fera les algorithmes de minimisation de l'ELC en remplaçant les solutions numériques par les expressions analytiques des solutions qui sont connues pour ce problème. Ce qu'on veut tester dans la suite, est la convergence de la méthode dans ce cas unidimensionnel.

Par exemple, pour l'identification de η_0 on va construire une suite $(\eta_0^n)_{n \in \mathbf{N}}$, η_0^{n+1} étant obtenue par la minimisation de l'ELC calculée à partir des solutions en déplacement donné, celle en force donnée, et η_0^n , la mesure ℓ , et les paramètres η_1, ω_1, r_0 étant supposés connus.

On va démontrer que la suite $(\eta_0^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers la valeur "réelle" η_0 , indépendamment du choix initial η_0^0 .

Avant de commencer effectivement on va remarquer qu'il est nécessaire de savoir a priori que la sphère contient une inclusion, car pour toutes les valeurs de ℓ il en existe une sphère homogène de même ℓ . Ce problème de non-identifiabilité ne se pose pas généralement parce qu'alors on a une plus grande diversité de chargements à appliquer sur la frontière.

Pour simuler l'algorithme numérique, on suppose qu'on a calculé la déformation $\epsilon(u_{ext}, \eta_0^n)$ correspondant au déplacement imposé u_{ext} et la contrainte $\sigma(p_{ext}, \eta_0^n)$ correspondant à la pression $p_{ext} = \ell u_{ext}$. La nouvelle valeur η_0^{n+1} va être obtenue en minimisant l'expression suivante de la distribution de l'ELC pour $r \in [0, r_0]$:

$$I(\eta) = \frac{1}{3} [\eta^{-\frac{1}{2}} (tr \sigma(p_{ext}, \eta_0^n))^2 - \eta^{\frac{1}{2}} (tr \epsilon(u_{ext}, \eta_0^n))^2]^2 \quad (2.27)$$

Le minimum est atteint pour la valeur :

$$\begin{aligned} \eta_0^{n+1} &= \frac{tr \sigma(p_{ext}, \eta_0^n)}{tr \epsilon(u_{ext}, \eta_0^n)} \\ &= \eta_0^n \frac{a_0^f(p_{ext}, \eta_0^n)}{a_0^d(p_{ext}, \eta_0^n)} \end{aligned}$$

En utilisant l'expression exacte des coefficients de la solution (2.26), (2.25), et (2.27) on peut réécrire la formule précédente sous la forme :

$$\eta_0^{n+1} = \eta_0^n \cdot \frac{C \eta_0^n + D}{A \eta_0^n + B} \cdot \frac{A \eta_0^0 + B}{C \eta_0^0 + D} \quad (2.28)$$

où A, B, C, D sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 2\omega_1 r_0^3 + \eta_1 r_1^3 \\ B &= 2\omega_1 \eta_1 (r_1^3 - r_0^3) \\ C &= r_1 (r_1^3 - r_0^3) \\ D &= r_1 (\eta_1 r_0^3 + 2\omega_1 r_1^3) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si on note :

$$f(x) = \frac{C x + D}{A x + B} \quad (2.30)$$

la formule réursive (2.28) devient :

$$\eta_0^{n+1} = \eta_0^n f(\eta_0^n) f(\eta_0)^{-1} \quad (2.31)$$

Comme f est une fonction injective, il est évident que η_0 est la seule limite possible de la suite. En raisonnant sur la monotonie de la suite et sur la position du choix initial η_0^0 par rapport à η_0 on se rend compte que la convergence $\eta_0^n \rightarrow \eta_0$ dépend seulement des signes de f' et de $(x f)'$. Dans notre cas, des calculs élémentaires montrent que le signe de f' est déterminé par le signe de :

$$B C - A D = -(2\omega_1 + \eta_1)^2 r_0^3 r_1^4 < 0 \quad (2.32)$$

et que le signe de $(x f)'$ est déterminé par le signe du polynôme suivant :

$$A C x^2 + 2b C x + B D \quad (2.33)$$

Le déterminant Δ du polynôme est :

$$\Delta = 4B C (B C - A D) < 0 \quad (2.34)$$

Ce qui implique que la fonction reste toujours positive.

En conclusion on a $f' < 0$ et $(x f)' > 0$ ce qui assure la convergence désirée.

Des calculs analogues montrent que la suite correspondante convergence vers la solution dans le cas où on minimise la distribution en loi de comportement sur le segment $[r_0, r_1]$.

L'identification des autres paramètres η_1, ω_1, r_0 se réduit aussi à une formule réursive de la forme (2.31). Les calculs effectués ont montré la convergences de toutes suites vers la solution.

2.5 Conclusions

Nous avons trouvé une méthode nouvelle d'accès à la distribution intérieure des modules élastiques à partir des mesures (déplacements - forces) sur la frontière

du corps. Cette méthode est intéressante à deux points de vue : d'une part elle est rigoureuse, prenant en compte le caractère des équations de l'élasticité, et sa convergence a été démontrée dans un cas simple, d'autre part elle fournit un premier outil d'investigation du problème d'identification en élasticité anisotrope.

Le champ d'applications de la méthode est autant mathématique (car beaucoup de questions sont encore ouvertes au point de vue mathématique), que pratique, car la décomposition de l'ELC peut être utilisée dans d'autres problèmes d'identification (i.e. problème spectrale inverse) ou d'optimisation en élasticité.

Chapitre 3

Exemples numériques

Dans ce chapitre nous présentons les résultats des calculs numériques afin de tester la méthode IDA proposé dans le chapitre précédent. Il s'agit des problèmes bidimensionnels en élasticité isotrope (paragraphe 3.2) ou à symétrie cubique (paragraphe 3.3), pour lesquels on a reconstruit différents distributions des modules élastiques à partir des mesures simulées par des calculs directes.

3.1 Description des test numériques

Les résultats numériques ont été obtenus par des calculs élément fini en deux étapes. Dans un premier temps on a simulé les mesures par des calculs directs et dans un deuxième temps on a reconstruit la distribution des modules élastiques à partir de ces mesures.

Les distributions des modules élastiques qu'on a essayé d'identifier sont données par les formules suivantes :

- distribution exponentielle (voir fig. 3.1) :

$$M_{real}(\mathbf{x}) = M_0 + \delta M_1 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{l^2}\right)$$

avec l une longueur caractéristique.

- inclusion marche (A), carré (B), et coin (D) (voir fig. 3.2) :

$$M_{reel} = \begin{cases} M_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta_1 \\ M_0 + \delta M_1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega - \Delta_1 \end{cases}$$

- inclusion annulaire (C) (voir fig. 3.2) :

$$M_{reel} = \begin{cases} M_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta_1 \\ M_0 + \delta M_1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta_2 - \Delta_1 \\ M_0 + \delta M_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega - \Delta_2 \end{cases}$$

ou M_0 , M_1 , et M_2 sont des valeurs constantes et Δ_1 et Δ_2 sont deux domaines, qui correspond aux inclusions tel que : $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Omega$.

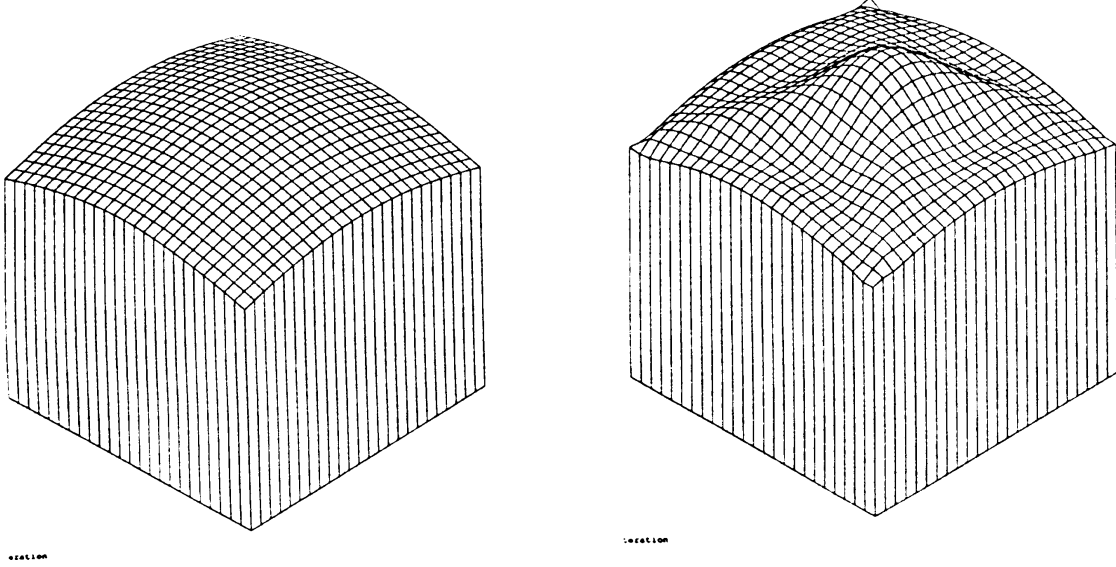


FIG. 3.1 – Distribution exponentielle réelle et reconstruite du module de Young E (élasticité isotrope : $\delta E_1/E_0 = 0.5, \nu = 0.3 = \text{constant}$)

Les mesures, N paires déplacements - forces : $(\xi_i, \varphi_i)_{i=1,N}$ données sur toute la frontière $\partial\Omega$, sont obtenues par des calculs éléments finis directes à partir de la distribution 'réelle' des modules élastiques. Pour chaque $\varphi_i, i = 1, N$ on a résolu le problème à forces imposées :

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{C}_{reel}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_i)) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{reel}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_i)\mathbf{n}|_{\partial\Omega} &= \varphi_i \end{aligned}$$

Les déplacements mesurées sont obtenues de l'égalité :

$$\xi = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}$$

Ces mesures ont été bruitées pour différents calculs avec un bruit blanc selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_{bruite} &= (1 + a \text{rand}(\mathbf{x}))\xi \\ \varphi_{bruite} &= (1 + a \text{rand}(\mathbf{x}))\varphi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ou a est l'amplitude du bruit, $\text{rand}(\mathbf{x})$ un nombre aléatoire dans $[-1, 1]$.

Une autre expression de bruit, plus pénalisante, a été aussi utilisée :

$$\begin{aligned}\xi_{bruite} &= \xi + a \text{ rand}(\mathbf{x}) \max(|\xi|) \\ \varphi_{bruite} &= \varphi + a \text{ rand}(\mathbf{x}) \max(|\varphi|),\end{aligned}\tag{3.2}$$

Les résultats des reconstructions ont été satisfaisantes pour des amplitudes : $n \leq 10\%$ avec le bruit "proportionnel" (3.1) et $n \leq 10\%$ avec le bruit "maximal" (3.2).

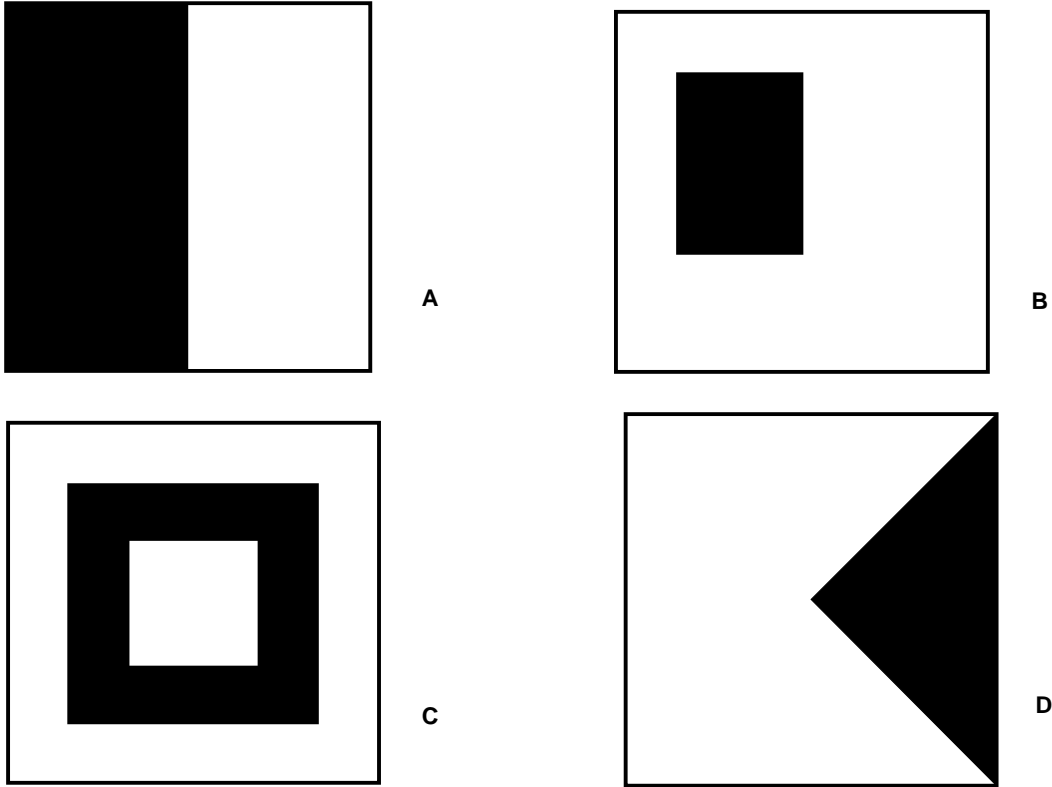


FIG. 3.2 – Formes des inclusions marche (A), carré (B), annulaire (C), et coin (D)

Comme forces imposées on a pris des distributions paraboliques des forces sur plusieurs nœuds, des forces concentrées ou des 'moments concentrées' (voir fig. 3.3) ; seul le point d'application du chargement varie d'une mesure à une autre.

Les distributions paraboliques ont été choisies pour leur ressemblance à la pression de contact de Hertz lors du contact entre deux corps élastiques. Les moments ont été choisis comme correspondants élastiques des dipôles électriques. Le dipôle électrique étant un des flux les plus utilisés dans le problème d'identification électrique qui a donné des bons résultats lors des reconstructions.

Les moments ont été introduits pour comparer leur résolution avec celles des

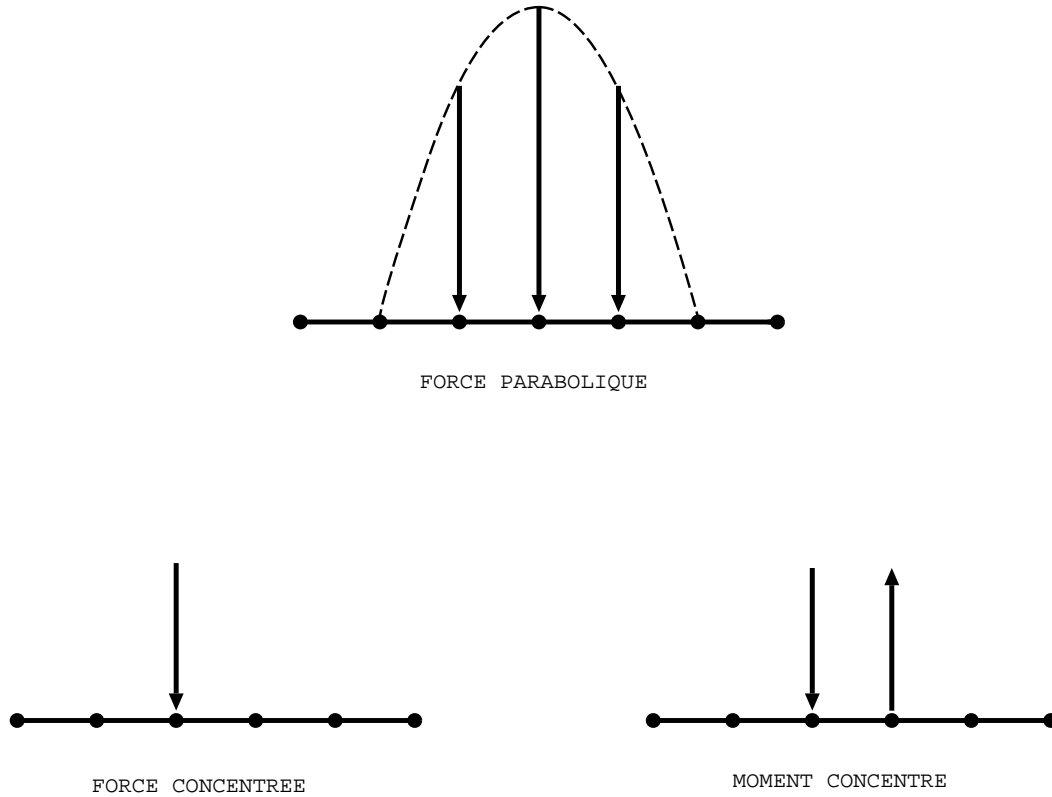


FIG. 3.3 – Différents distributions des forces imposées sur la frontière

distribution des forces paraboliques lors de la reconstruction.¹

A partir des mesures simulées par la méthode exposée avant on a reconstruit la distribution des modules élastiques en utilisant la méthode IDA (voir chapitre 2). Toutes les mesures ont eu le même poids dans la reconstruction, et aucune autre information initiale n'a pas été utilisée.

Les distributions des modules élastiques au commencement de la reconstruction ont été considérés constantes, leurs valeurs n'ont pas eu une influence particulière sur le résultat de la reconstruction.

Tous les calculs ont été programmés dans le langage (orienté éléments finis) 'gibiane' du code CASTEM2000 (CEA, France) sur des stations de travail HP 720 et HP/Apollo 400. Le domaine a été divisé dans $n \times n$ éléments carrés. Le plus fin maillage a eu 48×48 éléments. On a utilisé dans les éléments des fonctions de forme

¹On est conscients que de point de vue pratique c'est impossible d'imposer des moments sur la surface d'un corps. Tenant compte de la linéarité du problème, une possibilité de surpasser cette difficulté serait d'utiliser comme mesure la soustraction des deux mesures à force concentrée dans des locations voisines.

linéaires et quadratiques. Pour les éléments quadratiques on a rencontré un problème lié aux zones à fort gradient de déformation ou des distributions des champs strictement positives contenant des zones négatives après des transformations du champ des points Gauss sur les nœuds du maillage.

Pour un domaine divisé en $n \times n$ éléments on a considéré $4(n - k)$ mesures, où k désigne la largeur, en nombre d'éléments du chargement (distribution de pression, force ou moment concentré). Le raffinement du maillage, sans l'augmentation correspondante du nombre de mesures n'a pas produit un effet significatif sur le résultat que dans un voisinage de la frontière. C'est le phénomène de "saturation" indiqué par P.Sabatier en microgravimétrie [13].

En ce qui concerne le temps de calcul on remarque dans le cas à symétrie cubique que, pour un maillage 24×24 , 96 des simulations des mesures sont exécutées dans 6 minutes sur une station HP 720. Par contre pour 17 itérations dans de l'algorithme de reconstruction pour le même maillage, ce qui correspond à $96 \times 17 = 1632$ calculs directes, on pris 5 heures de calcul pour la même station de travail, et non pas $6' \times 17 \approx 2$ heures. Le temps supplémentaire est justifié par le passage entre différentes expressions du tenseur d'élasticité (modules, modules propres) et par les calculs des invariants correspondants à la déformation et la contrainte ainsi que par le calcul des différents coefficients d'erreur.

3.2 Résultats - Elasticité isotrope

Les exemples traités dans le cas de l'élasticité isoptrope ont essayé de reconstruire la distribution intérieure du module de Young et /où du coefficient de Poisson.

Les résultats numériques obtenus nous ont amenés à constater que :

- Le module calculé après 5-15 itérations est à 10-20% du module réel. L'erreur relative dépend de la distribution des modules élastiques recherchée et du niveau de bruit. Pour des niveaux de bruit : $n > 5\%$, pour bruit maximal, $n > 10\%$, pour bruit proportionnel, on reste à plus de 20% en erreur relative de la distribution réelle. Si on continue les itérations, la descente de l'erreur relative devient très lente ou peut même croître dans différents cas. (voir fig. 3.6).

La forme de la distribution est déterminée pratiquement dans les premières itérations. Avec un nombre croissant d'itérations on s'approche de plus en plus des valeurs du maximum.

La localisation spatiale des inclusions est très bonne. Par contre la reconstruction ne conserve pas une forme rectangulaire pour les inclusions de cette forme, elle reste arrondie même pour les maillages les plus fins 64×64 . (voir fig. 3.7).

- L'erreur en loi de comportement à un comportement similaire. Après une descente rapide dans les premiers itérations elle tend presque asymptotique-

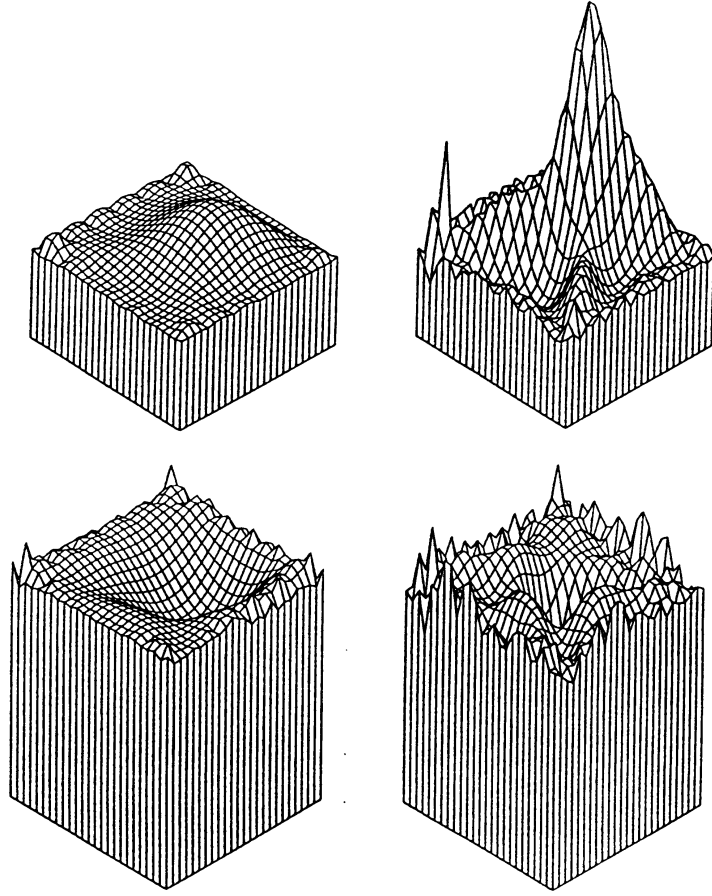


FIG. 3.4 – Reconstruction du module de Young (en haut) et du coefficient de Poisson (en bas) pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 0.5$ $\nu = constant$, maillage 24×24) après 4 itérations (à gauche) et après 40 itérations à droite

ment vers une valeur limite, avec une faible décroissance même pour 100-200 itérations. Le bruit influence en même temps la vitesse de descente des premiers itérations et la valeur limite pour un grand nombre d'itérations. (voir fig. 3.7).

On n'a pas rencontré des cas où l'erreur en loi de comportement croît.

- L'influence du bruit sur la reconstruction est concentrée essentiellement dans une bande à la frontière du domaine (voir fig. 3.8).
- Une différence entre les différents types de forces testées a été observée pour l'inclusion annulaire (C). Seulement les test faits avec des distributions des moments ont identifié un anneau et pas une inclusion carrée pour un nombre

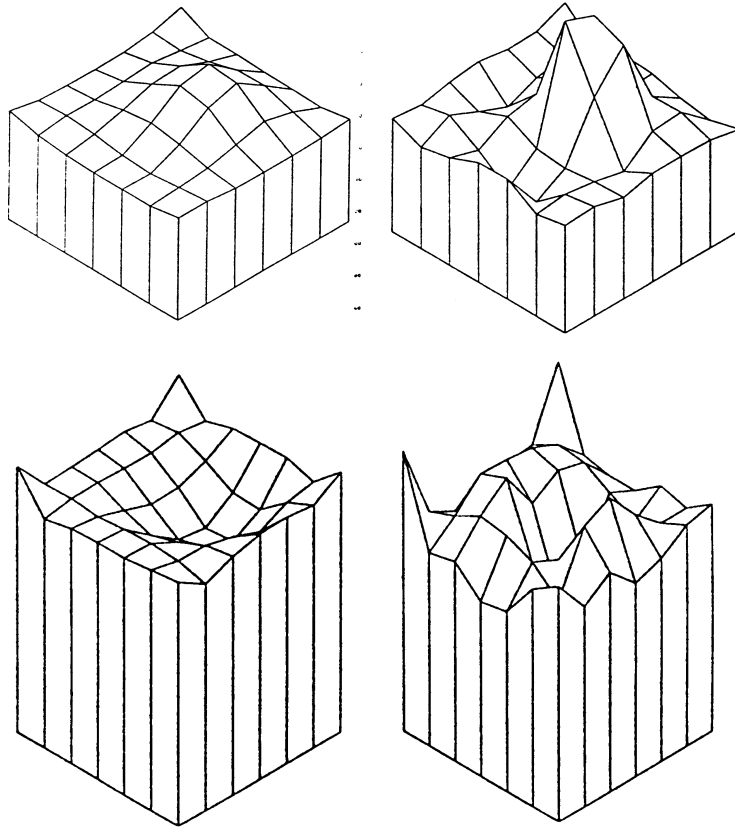


FIG. 3.5 – Reconstruction du module de Young (en haut) et du coefficient de Poisson (en bas) pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 0.5, \nu = \text{constant}$, maillage 6×6) après 4 itérations (à gauche) et après 40 itérations à droite

de 50 itérations Si on regarde l'erreur relative pour les deux calculs on remarque que le calcul avec des forces concentrées atteint une erreur relative minimale de 27% après 25 itérations qui reste pratiquement constante, tandis que pour des moments concentrées on atteint une erreur relative de 20 % après 25 itérations, de 17 % après 50 itérations, et qui continue à descendre.

- Si la différence $|E_0 - E_1|$ est grande, on observe des oscillations du module calculé qui augmente avec le nombre d'itérations.
- L'application de la pression proche des coins du domaine a eu un effet stabilisant sur la solution, en éliminant les oscillations.

3.3 Résultats - Elasticité à symétrie cubique

Les exemples présentés dans la suite, pour le cas de l'élasticité à symétrie cubique, correspondent à l'identification d'une inclusion de différents formes (voir fig. 3.2) dans une matrice. Les matériaux utilisés ont été aluminium et cuivre ayant les valeurs suivantes pour les modules élastiques :

$$\begin{aligned} E_{Al} &= 66.10^9 Pa & \nu_{Al} &= 0.32 & G_{Al} &= \frac{E_{Al}}{2(1 + \nu_{Al})} = 25.10^9 Pa \\ E_{Cu} &= 66.10^9 Pa & \nu_{Cu} &= 0.42 & G_{Cu} &= 75.10^9 Pa \end{aligned}$$

On remarque que le cuivre est un matériau à symétrie cubique tandis que l'aluminium est isotrope. Dans la reconstruction on a considéré l'aluminium aussi à symétrie cubique, ce qui est équivalent à supposer que lors de la reconstruction les trois modules E, ν, G sont indépendantes. La reconstruction a généralement donné des valeurs proches aux valeurs des modules réelles dans les zones contenant de l'aluminium, ce qui montre qu'on a numériquement retrouvé l'isotropie de l'aluminium, sans hypothèses supplémentaires.

Par rapport aux calculs présentés dans le cas de l'élasticité isotrope un faible filtrage a été introduit dans la reconstruction. Pour éliminer la divergence des modules on a forcé, par coupe à chaque itération, les modules élastiques de rester dans un intervalle donné. La valeurs permises ont été 5 fois plus grandes ou plus petites que les valeurs initiales à la première itération.

Les distributions initiales des modules au commencement de la reconstruction ont été des constantes. Les valeurs étant à 0–10% différence des valeurs des modules de cuivre et aluminium. On n'a pas observé une influence remarquable des valeurs initiales sur les résultats de la reconstruction.

Aucune hypothèse initiale n'a pas été faite sur la distribution des modules élastiques.

Une suite complète des calculs a été effectué sur un maillage 24×24 pour une matrice de aluminium contenant une inclusion de cuivre, pour des forces concentrées et de moments concentrées avec des niveaux de bruit $n = 0, 1, 5, 10\%$. Le bruit a été considéré dans tous les cas comme proportionnel à la valeur mesurée dans chaque point (3.1). Les valeurs des différents erreurs relatives (L^2 , volume ou moment par rapport aux axes) sont présentées dans l'annexe A.4.

Une illustration partielle des résultats est présentée dans les figures 3.11- 3.26.

Les résultats numériques obtenus nous ont amenés à constater que :

- La forme, la position et des valeurs moyennes des modules élastiques sont généralement bien reconstruites dans les premières 5-20 itérations. L'erreur relative, en volume ou en moment par rapport aux modules réels dépend de la forme de l'inclusion, de la charge appliquée et du niveau de bruit. Les erreurs minimales obtenues varient selon les cas entre 0% 20 % pour les différents

types d'erreurs rencontrées. Dans des cas pathologiques, par exemple 10 % de bruit, les erreurs peuvent même croître après les premières 10 itération.

En erreur relative on arrive à descendre en dessous 10% pour le module de Young E et le coefficient de Poisson ν et à 10-30% pour le module de cisaillement G . L'influence du bruit sur l'erreur relative est considérable comme montrée dans les tableaux de l'annexe A.4.

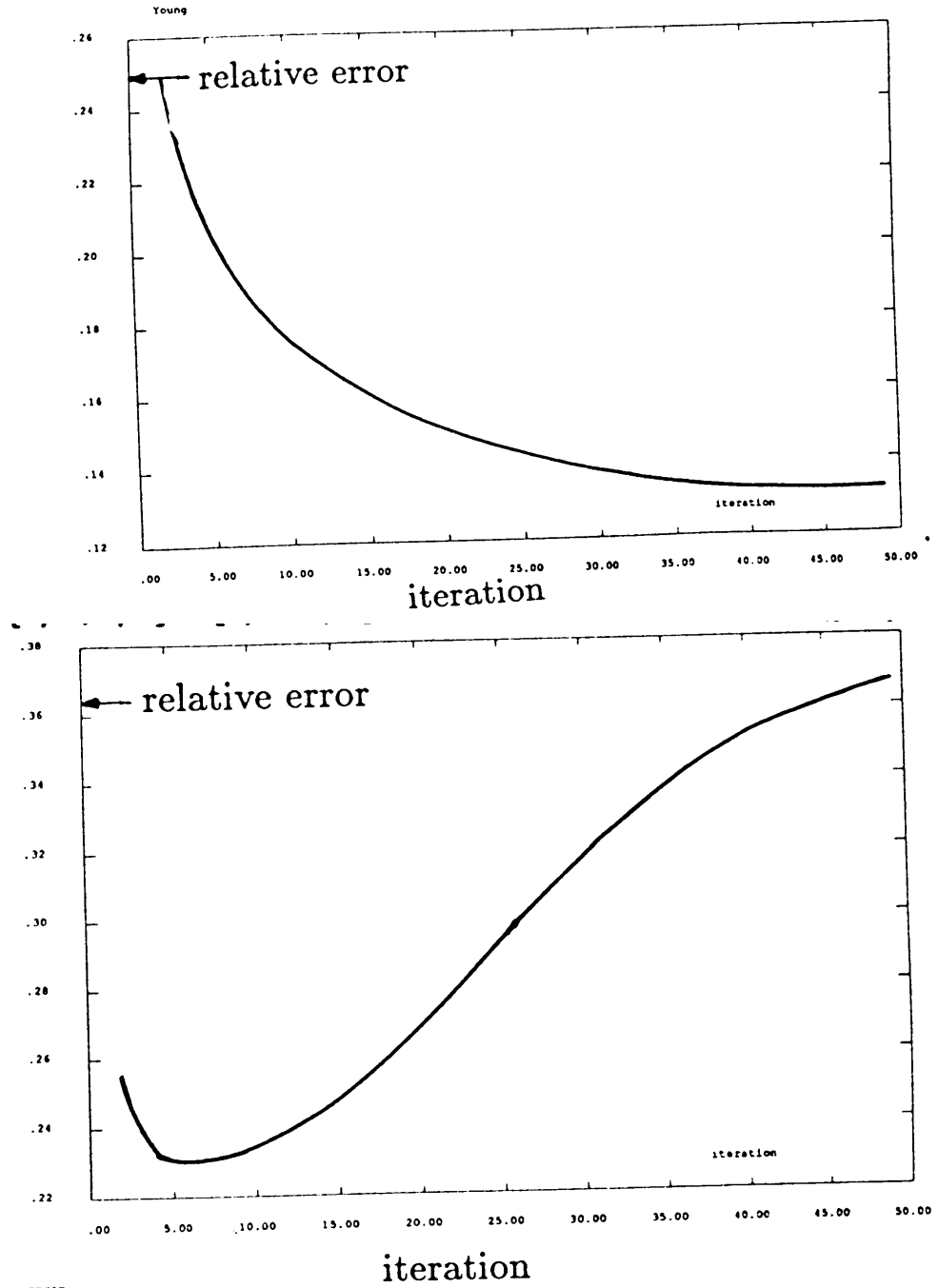
Les erreurs en volume et moment sont après les premières 5 itérations de l'ordre de 10% - 20% pour le module de cisaillement G et plus petites que 5% pour le module de Young E et le coefficient de Poisson ν . En continuant les itérations les erreurs descend en dessous de 10% pour le module de cisaillement G et en dessous de 2% - 3% pour le module de Young E et le coefficient de Poisson ν . Ces valeurs sont valables pour jusqu'à 5% de bruit. A 5% de bruit on a une détérioration de la reconstruction à 17 itérations seulement pour l'inclusion coin (D). Par contre à 10% de bruit toutes les formes d'inclusion testées se détériorent après un faible nombre (≈ 10) d'itérations.

On observe que, les erreurs relatives sont généralement plus grandes que les erreurs en volume ou en moment. Ceci s'explique par les formes ondulées des surfaces reconstruites et assure une meilleure reconstruction si le nombre des valeurs à identifier est plus petit. Donc des informations à priori sur les formes des inclusions vont probablement améliorer les résultats.

Du point de vue localisation spatiale, on observe comme dans le cas isotrope que les oscillation provoquées par le bruit sont plus significatives dans une bande à la frontière du domaine.

- Si on compare les reconstructions obtenues en appliquant des forces et des moments concentrés, on observe que les forces donnent des modules plus proches dans les premières (1 - 8) itérations mais que les moments devient après 10 itérations généralement plus précises. Un phénomène similaire a été aussi observe dans le cas de l'élasticité isotrope.
- Un effet stabilisateur sur la solution est obtenu par les mesures proches des coins du domaine.
- On n'a pas observé une croissance ou une décroissance systématique des erreurs pour des maillages de plus en plus fins. Une explication possible est que pour les maillages plus fins on a aussi eu un nombre plus grand de mesures et de points de mesure, ce qui n'est pas le cas dans la comparaison faits dans le cas isotrope où le nombre des mesures a été tenu constant.
- En comparant les reconstructions des différents modules, on a des modules de Young et des coefficients de Poisson plus proches des distributions réelles (en erreurs) que les modules de cisaillement. Par contre on observe que la reconstruction des modules de cisaillement est plus robuste au bruit.
- L'erreur en loi de comportement a une descente rapide dans les premières 5 - 10 itérations, après un palier à descente très lente, pour les faibles valeurs de bruit (0% - 5%), est atteint. Pour des valeurs 5% - 10% on perd la convergence

et l'erreur en loi de comportement se met à osciller irrégulièrement en introduisant des oscillations de plus en plus grandes dans les modules reconstruits.



NI FECIT

FIG. 3.6 – Erreur relative du module de Young reconstruit pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 0.5, \nu = \text{constant}$, maillage 6×6) avec des mesures sans bruit (en haut) et avec bruit $n = 5\%$ (en bas)

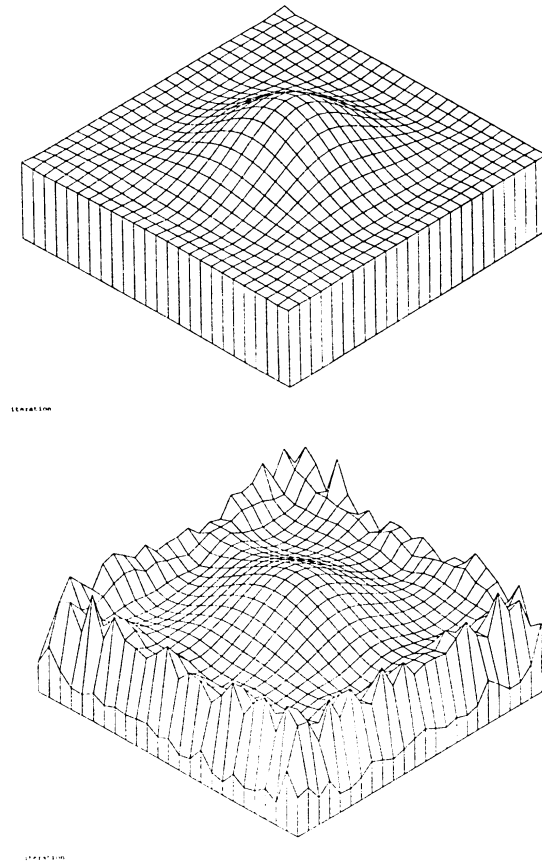


FIG. 3.7 – Distribution du module de Young reconstruit pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 1, \nu = \text{constant}$, maillage 6×6) avec des mesures sans bruit (en haut) et avec bruit $n = 5\%$ (en bas)

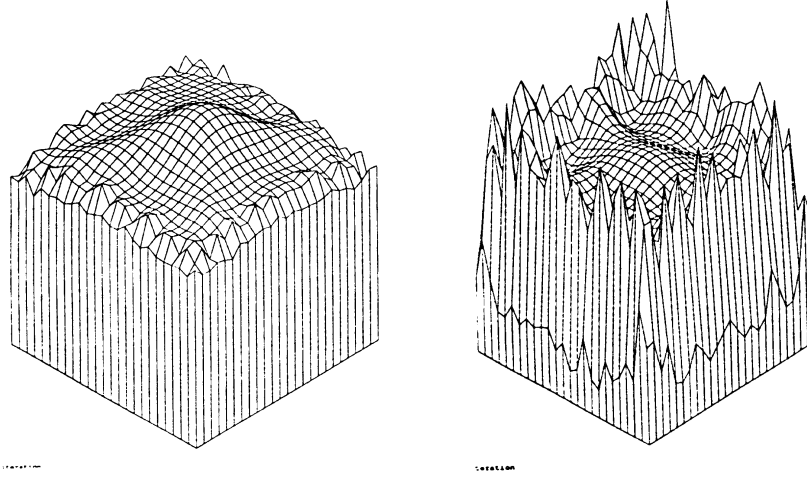


FIG. 3.8 – Distribution reconstruite exponentielle du module de Young ($\delta E_1/E_0 = 0.5, \nu = \text{constant}$, maillage 24×24) avec des niveaux de bruit : $n = 1\%$ (à gauche) et $n = 5\%$ (à droite)

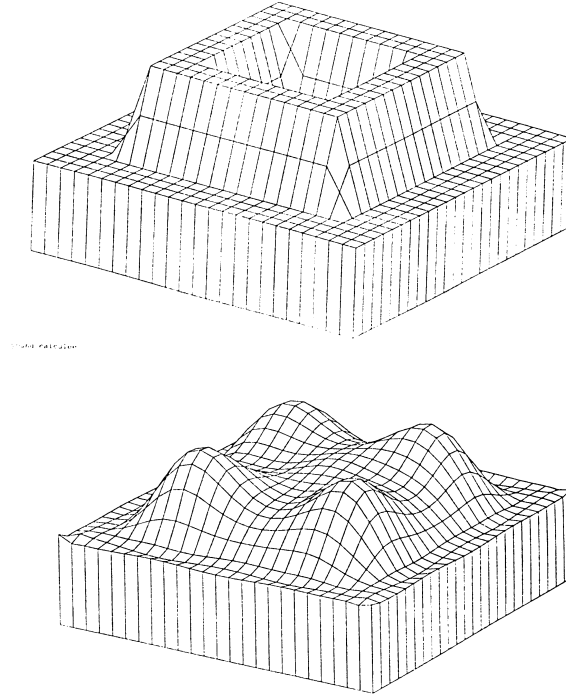


FIG. 3.9 – Module de Young réel (en haut) et reconstruit après 15 itérations (en bas) pour une inclusion annulaire (C) ($\delta E_1/E_0 = 1, \nu = \text{constant}$, maillage 24×24)

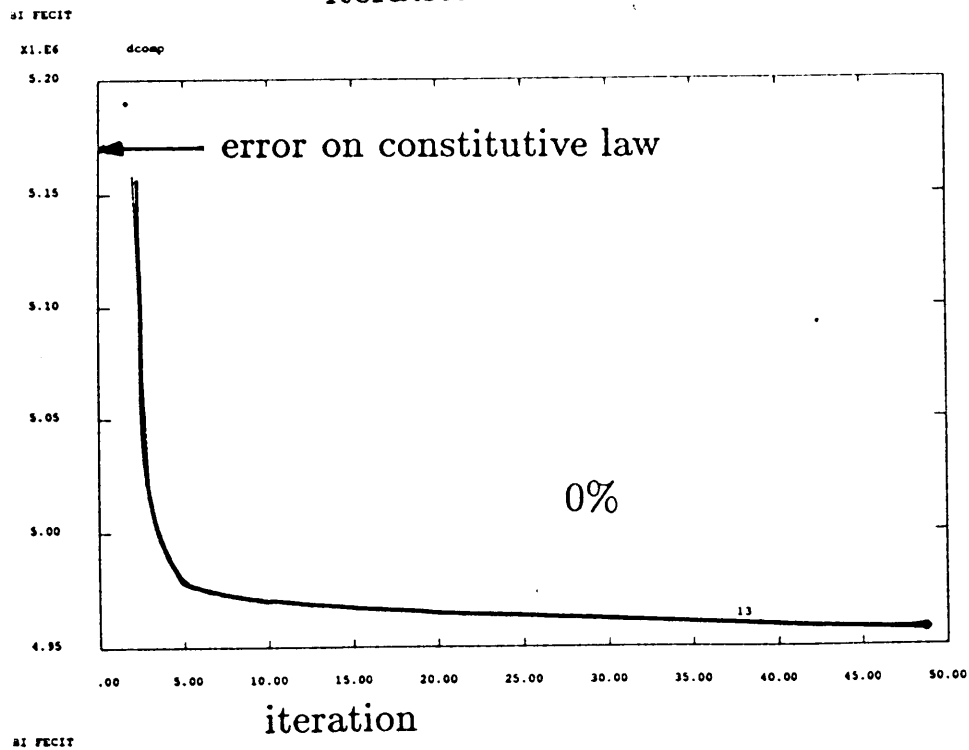
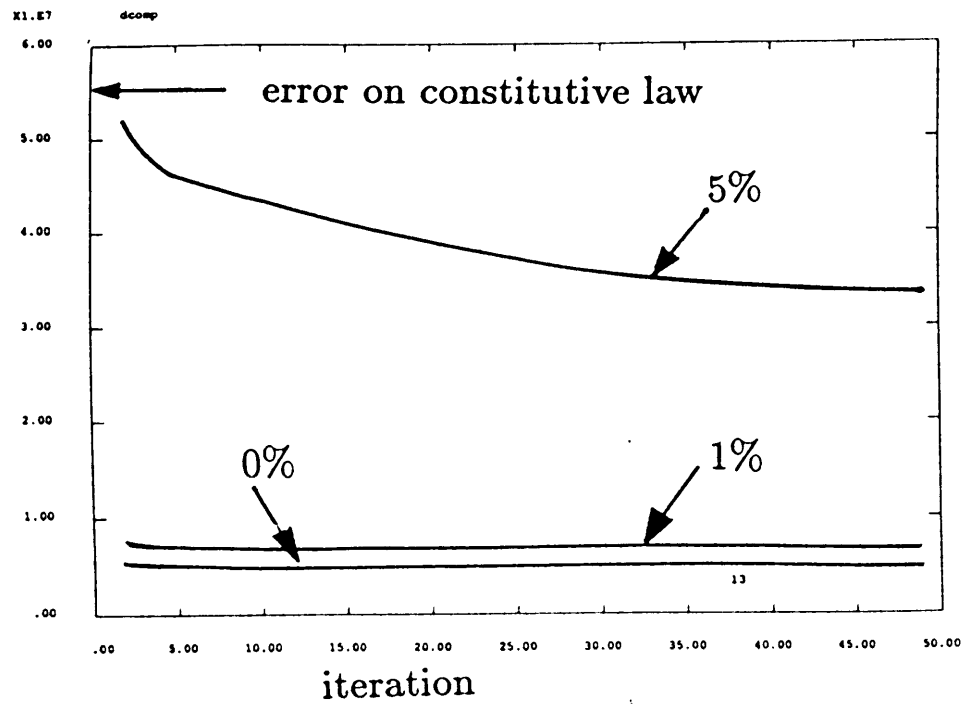


FIG. 3.10 – Erreur en loi de comportement pour des distributions exponentielles du module de Young avec (en haut) et sans bruit (en bas) ($\delta E_1/E_0 = 0.5$)

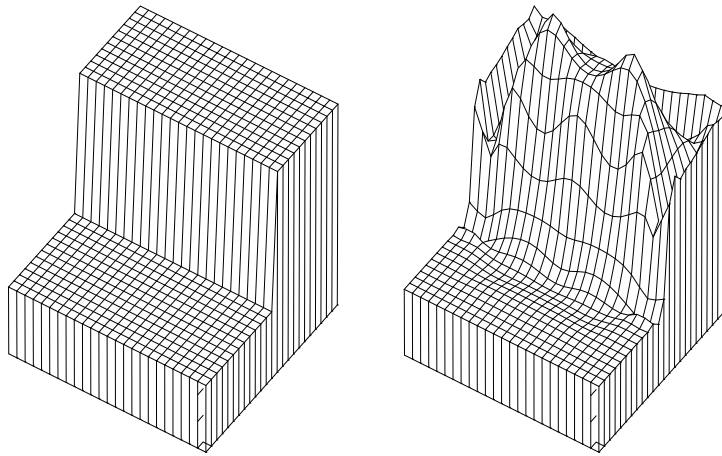


FIG. 3.11 – Inclusion A (marche) - distribution réelle et reconstruite (11 itérations) du module de cisaillement G

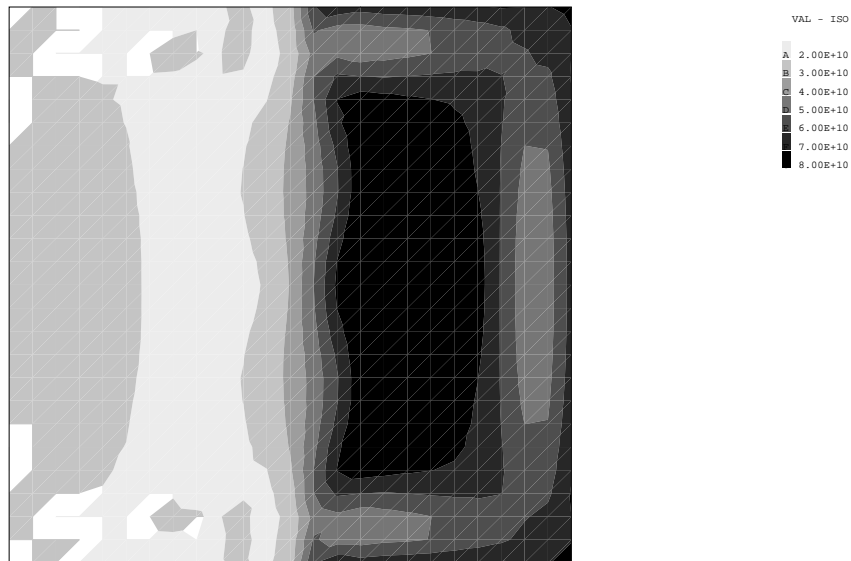


FIG. 3.12 – Inclusion A (marche) - distribution reconstruite (11 itérations) du module de cisaillement G

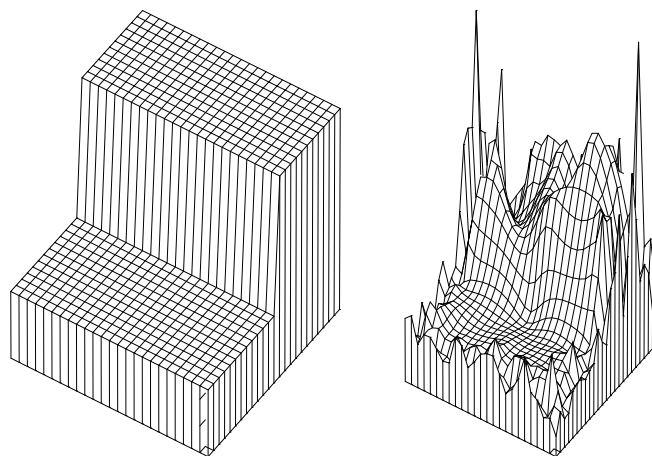


FIG. 3.13 – Inclusion A (marche) - distribution réelle et reconstruite (5 itérations)
du module de cisaillement G - 5% bruit

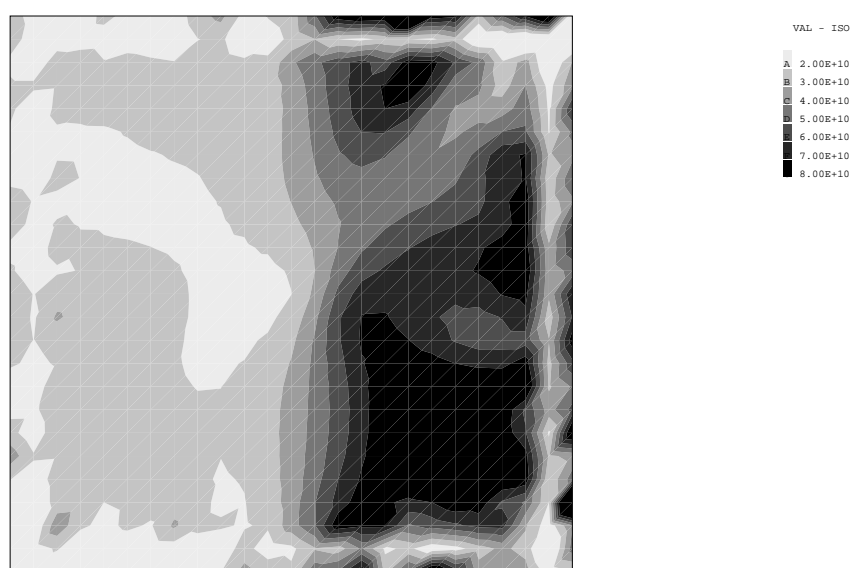


FIG. 3.14 – Inclusion A (marche) - distribution reconstruite (5 itérations) du module de cisaillement G - 5% bruit

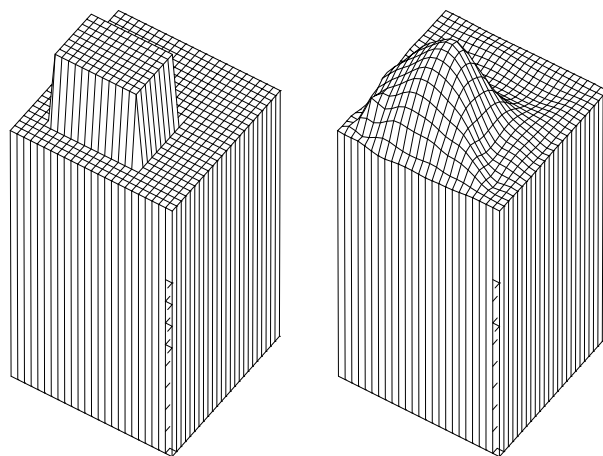


FIG. 3.15 – Inclusion B (carre) - distribution réelle et reconstruite (32 itérations) du coefficient de Poisson ν - 0% bruit

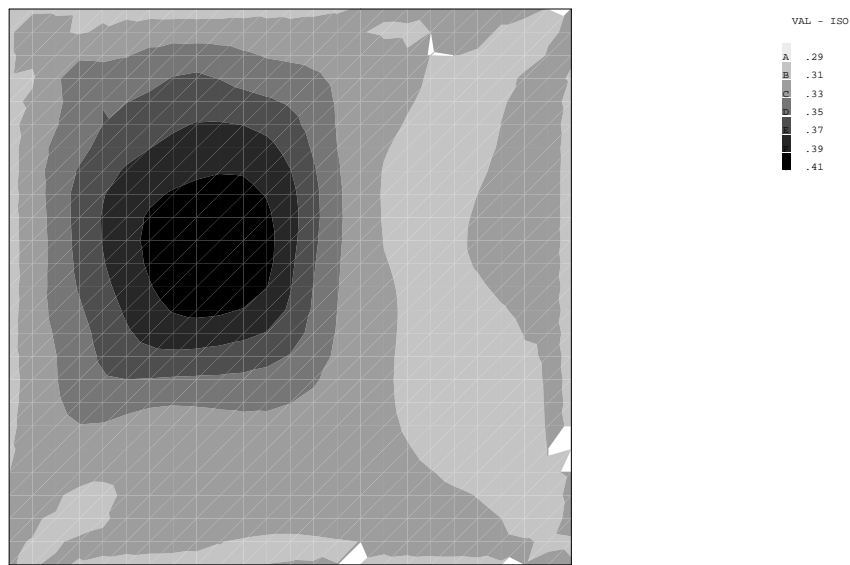


FIG. 3.16 – Inclusion B (carre) - distribution reconstruite (32 itérations) du coefficient du Poisson ν - 0% bruit

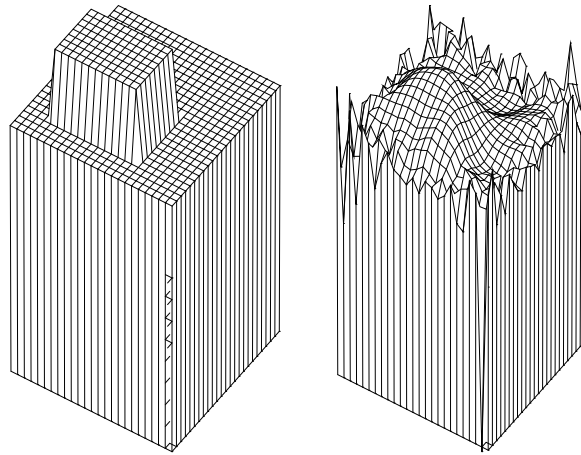


FIG. 3.17 – Inclusion B (carre) - distribution réelle et reconstruite (10 itérations) du coefficient de Poisson ν - 0% bruit

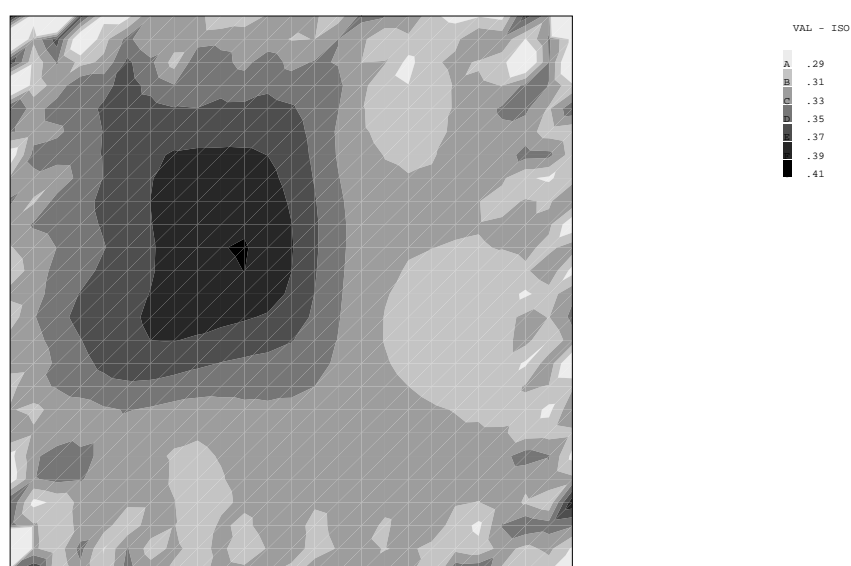


FIG. 3.18 – Inclusion B (carre) - distribution reconstruite (10 itérations) du coefficient du Poisson ν - 0% bruit

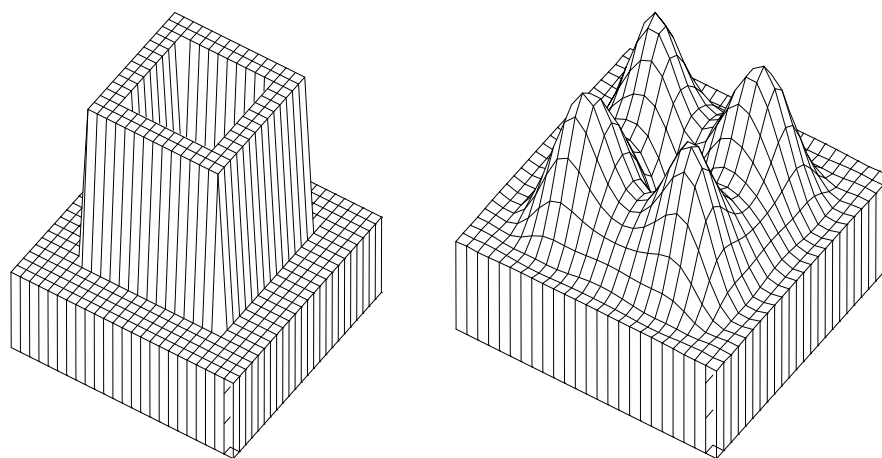


FIG. 3.19 – Inclusion C (annulaire) - distribution réelle et reconstruite (32 itérations) du module de cisaillement G

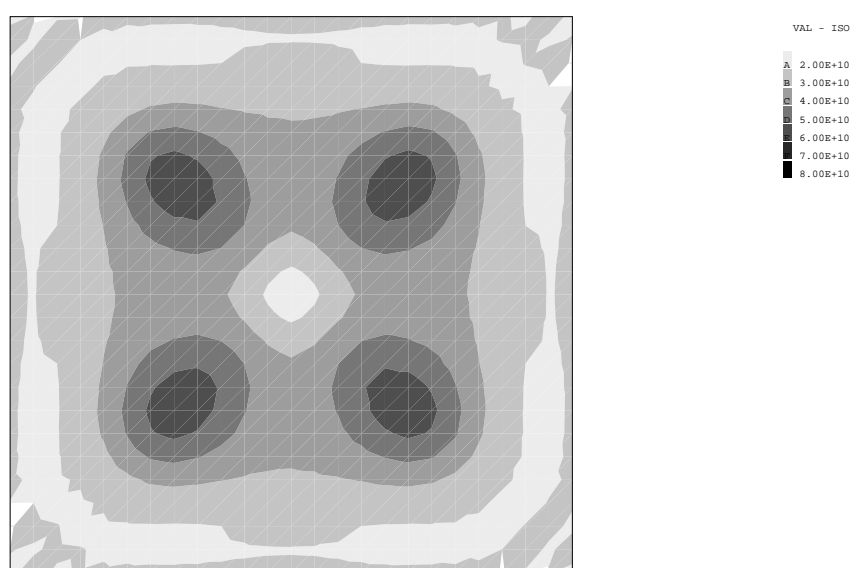


FIG. 3.20 – Inclusion C (annulaire) - distribution reconstruite (32 itérations) du module de cisaillement G

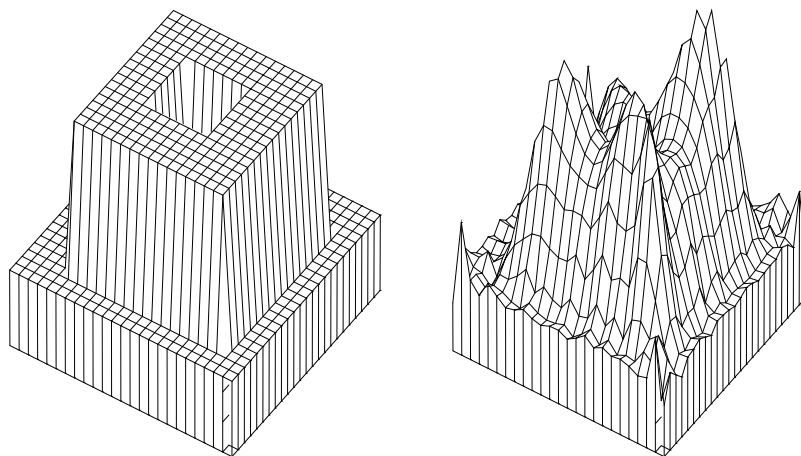


FIG. 3.21 – Inclusion C (annulaire) - distribution réelle et reconstruite (17 itérations)
du module de cisaillement G - 5% bruit

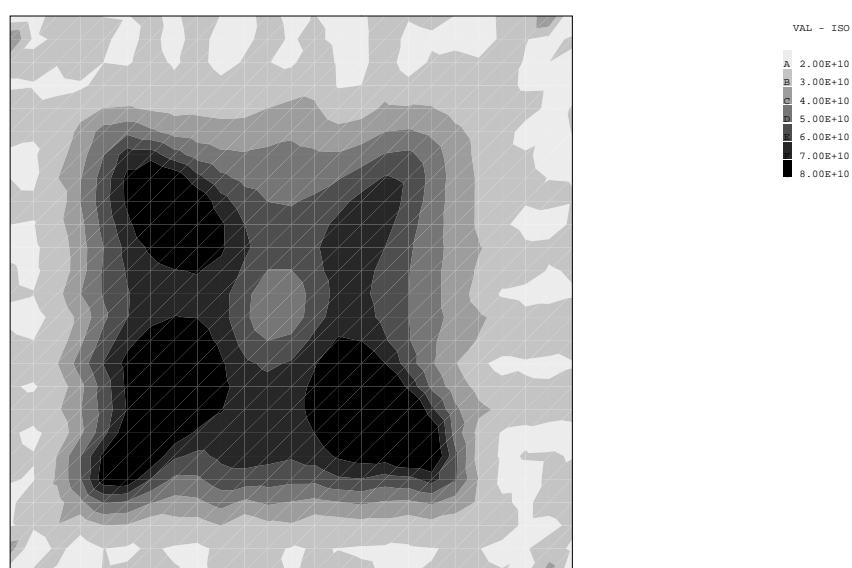


FIG. 3.22 – Inclusion C (annulaire) - distribution reconstruite (17 itérations) du module de cisaillement G - 5% bruit

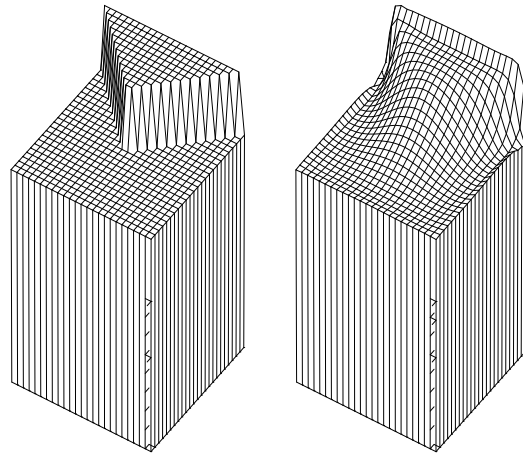


FIG. 3.23 – Inclusion D (annulaire) - distribution réelle et reconstruite (14 itérations)
du coefficient de Poisson ν - 0% bruit

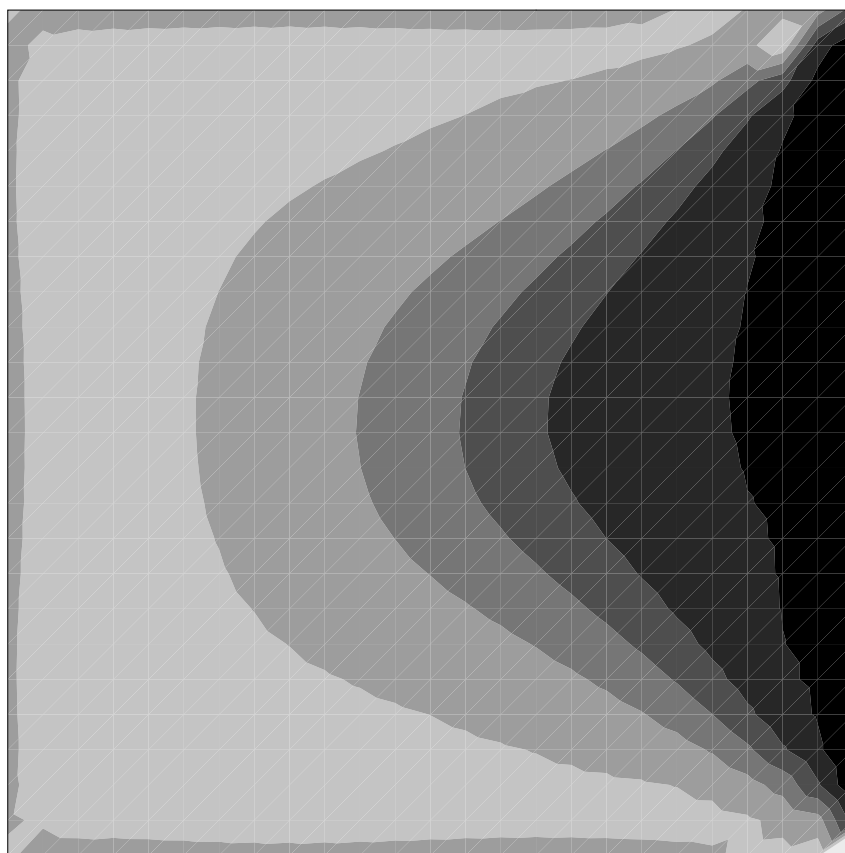


FIG. 3.24 – Inclusion D (échelle) - distribution reconstruite (14 itérations) du coefficient du Poisson ν - 0% bruit

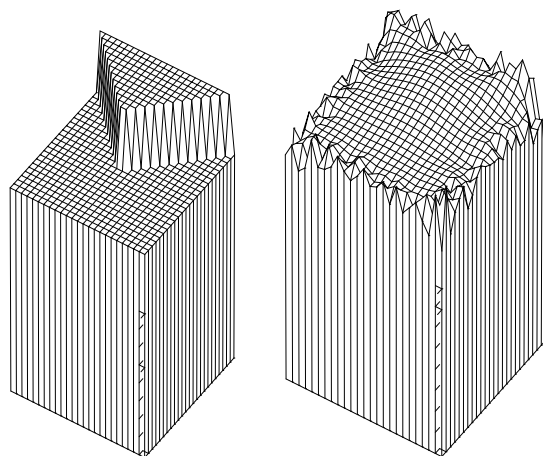


FIG. 3.25 – Inclusion D (échelle) - distribution réelle et reconstruite (2 itérations)
du coefficient de Poisson ν - 10% bruit

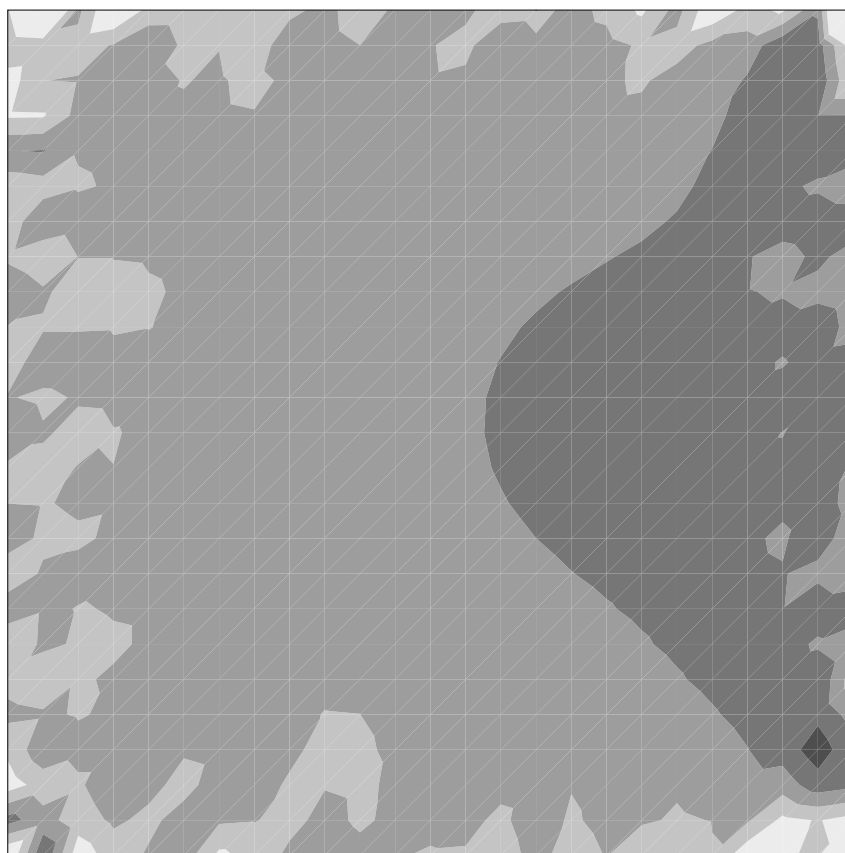


FIG. 3.26 – Inclusion D (échelle) - distribution reconstruite (2 itérations) du coefficient du Poisson ν - 10% bruit

3.4 Comparaison avec le problème électrique

Il est intéressant de comparer les images obtenues précédemment, dans le cas élastique, avec les images obtenues par Kohn et McKenney [39] dans le cas électrique. On rappelle que dans le cas électrique, ils avaient minimisé l'équivalent de l'ELC pour une conductivité isotrope. Les deux calculs, élastique et électrique, présentent deux différences essentielles :

- Dans le cas électrique, Kohn et Vogelius ont utilisé pour la minimisation les deux méthodes IDA et MN. L'algorithme IDA a été utilisé dans les premières itérations pour l'obtention d'une première approximation de l'image reconstruite, ensuite ils ont continué avec l'algorithme MN jusqu'à la convergence. Dans le cas élastique, seulement la méthode IDA, a été utilisée.
- Les potentiels utilisés en électricité comme charges sur la frontière ont la forme des fonctions harmoniques :

$$\varphi(x, y) = c \operatorname{Re}[(x + iy)^k], \quad k = 1, 5$$

trouvées optimales [33, 34, 35] pour détecter des inhomogénéités dans un domaine circulaire.

Tandis que, dans le problème élastique, les charges appliquées ont été des distributions de pression, des forces ou des moments concentrés.

On observe (voir fig. 3.27), que les images reconstruites en élasticité et électricité sont de qualités comparables, même si les méthodes ne sont pas exactement équivalentes.

Un autre point intéressant, qui permet une comparaison avec le cas électrique, est la forme relaxée de l'ELC et le passage du cas isotrope au cas anisotrope. On a remarqué dans la paragraphe 2.2.3, que la relaxation de l'ELC permet de s'affranchir, lors de la minimisation, de la condition d'isotropie portant sur le tenseur d'élasticité \mathbf{C} (respectivement sur le tenseur des conductivités, dans le cas électrique).

Si on compare, de point de vue numérique, la minimisation de l'ELC sur un maillage fin avec la minimisation de la relaxation de l'ELC sur un maillage grossier on doit obtenir des résultats semblables [43]. Dans le cas électrique, la minimisation de la relaxation de l'ELC a donné des résultats désastreux [39] : pour une conductivité réelle isotrope la conductivité reconstruite a été fortement anisotrope. Ce résultat, en contradiction avec la théorie mathématique de la relaxation, a été considéré comme une conséquence de la non-unicité du problème d'identification dans le cas anisotrope.

Regardons maintenant, ce qui se passe en élasticité. Dans le cas anisotrope, on a utilisé sans avoir des difficultés particulières, l'ELC correspondante à la symétrie cubique (qui est une première relaxation de l'ELC correspondante à l'isotropie) pour identifier un matériau isotrope. Notre résultat apparaît donc en accord avec la théorie mathématique et en contradiction avec l'expérience de Kohn et McKenney [39]. Dans l'interprétation il faut peut-être tenir compte de caractère spécial de

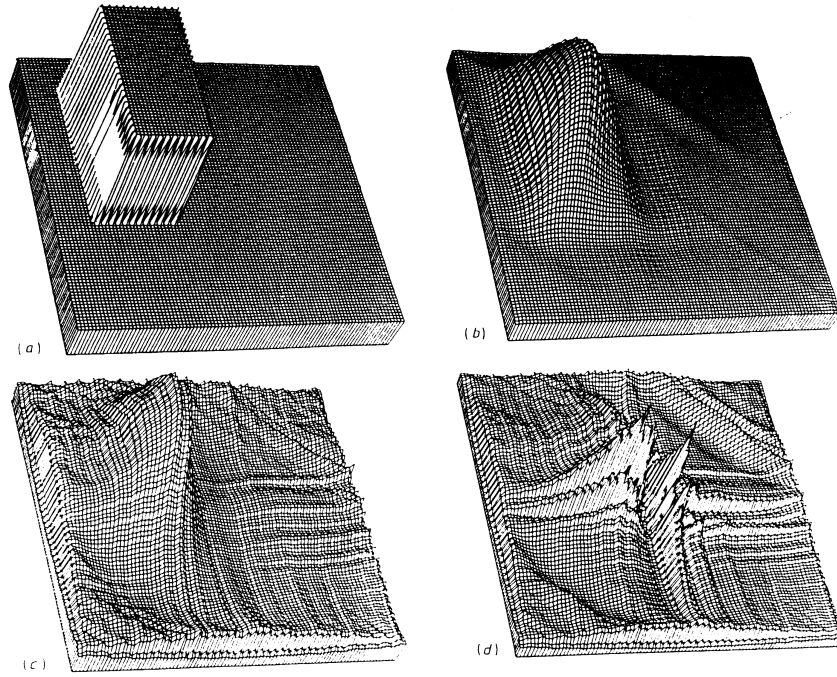


FIG. 3.27 – Reconstruction d'un conductivité (d'après Kohn et McKenney) : (a) conductivité réelle, (b) reconstruction sans bruit, (c) reconstruction 3% bruit (11 itérations), (d) reconstruction 3% bruit (50 itérations)

la relaxation lors du passage de l'isotropie à la symétrie cubique. Dans ce passage on a libéré en effet un seul degré de liberté de plus, qui correspond à un module propre. L'instabilité rapporté par Kohn et McKenney doit probablement parvenir au moment de la libération des degrés de liberté correspondants aux distributeurs élastiques ou aux paramètres d'orientation.

C'est intéressant de remarquer que ces phénomènes sont en accord avec la conjecture d'unicité proposée dans le paragraphe 1.5, où on postule l'identifiabilité des module propres et la non-identifiabilité des distributeurs élastique et paramètres de coordonnées.

3.5 Conclusion

On a montré que la minimisation de l'ELC donne un algorithme raisonnablement exact et stable pour résoudre le problème d'identification des modules élastiques.

Pour les inclusions situées à l'intérieur du domaine la reconstruction est une image lissée avec une bonne représentation de la position et de la forme de l'inclu-

sion. La méthode s'est montré plutôt stable au bruit expérimental. Les irrégularités observées peuvent être éliminées soit par filtrage, soit par diminution du nombre des paramètres en utilisant des informations a priori (i.e. forme ou position de l'inclusion).

Une conclusion importante est le fait que l'ELC peut être utilisé comme indicateur de convergence de la méthode. Elle est calculée seulement à partir des champs obtenus lors de la reconstruction.²

La finalisation de la reconstruction après un faible nombre d'itérations a un bon effet sur l'image des modules, 5-15 itérations avec la méthode IDA donnent généralement un résultat suffisamment bon.

La méthode proposée présente plusieurs avantages. Chaque itération est facilement parallélisable, car on peut calculer sur des processeurs différents les champs de déformations et de contraintes correspondantes à des mesures différentes. C'est aussi important de noter qu'elle est indépendante du type de chargement appliqué à la frontière lors des mesures, et du type de distribution des modules élastiques. Les avantages provient du fait que sa formulation est variationnelle et qu'elle n'est pas liée à un problème linéarisé. La formulation variationnelle assure aussi que le problème numérique converge dans le cas idéal vers la solution.

²L'ELC est calculée à l'itération i par la formule :

$$I(\mathbf{C}_{i-1}, \boldsymbol{\epsilon}_i, \boldsymbol{\sigma}_i)$$

ou \mathbf{C}_i est le tenseur élastique déterminé à l'itération précédente et $\boldsymbol{\epsilon}_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_i$ sont les déformations et contraintes calculées avec \mathbf{C}_i à cette itération.

Annexe A

Annexes

A.1 Tenseurs et modules élastiques propres

L'équation constitutive :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

est une relation linéaire entre des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbf{R}^3 . On s'intéresse dans ce qui suit à la détermination de l'état de déformation $\boldsymbol{\epsilon}$, pour lequel le tenseur de déformation $\boldsymbol{\epsilon}$ est parallèle au tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. Pour déterminer ces directions on va réécrire l'équation constitutive comme relation linéaire entre deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 6 :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2^{1/2}\sigma_{23} \\ 2^{1/2}\sigma_{31} \\ 2^{1/2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2^{1/2}\epsilon_{23} \\ 2^{1/2}\epsilon_{31} \\ 2^{1/2}\epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 2^{1/2}C_{1123} & 2^{1/2}C_{1131} & 2^{1/2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 2^{1/2}C_{2223} & 2^{1/2}C_{2231} & 2^{1/2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 2^{1/2}C_{3323} & 2^{1/2}C_{3331} & 2^{1/2}C_{3312} \\ 2^{1/2}C_{2311} & 2^{1/2}C_{2322} & 2^{1/2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ 2^{1/2}C_{3111} & 2^{1/2}C_{3122} & 2^{1/2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ 2^{1/2}C_{1211} & 2^{1/2}C_{1222} & 2^{1/2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix}$$

L'application qui relie le tenseur 3-dimensionnel d'ordre deux \mathbf{A} avec le vecteur 6-dimensionnel correspondant $\hat{\mathbf{A}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par rapport aux autres isomorphismes existents (notation de Voigt, notation de Kelvin, voir [22]) il présente deux avantages : il est le même pour les déformations et les contraintes et il transforme le tenseur d'élasticité d'ordre quatre \mathbf{C} dans un *tenseur* d'ordre deux $\hat{\mathbf{C}}$ (i.e. les composantes changent au changement de repère comme les composantes des tenseurs).

En utilisant la définition de Mehrabadi et Cowin [22, 23] on va appeler cette projection la *notation en tenseur d'ordre 2*, ou la notation fait référence aux modules d'élasticité qui dans ce cas sont représentées par un tenseur d'ordre 2.

Notre problème principal, qui cherche à déterminer les directions parallèles des déformations et contraintes se transforme dans cette formalisation en un problème standard à valeurs et vecteurs propres.

$$(\hat{\mathbf{C}} - c\mathbf{1})\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$$

Compte tenu du fait que $\hat{\mathbf{C}}$ est un tenseur défini positif dans un espace vectoriel 6 - dimensionnel, on a $K \leq 6$ valeurs propres différentes c_k et vecteurs propres associés $\hat{\epsilon}^{(k)}$, $k = 1, 6$.

On va dénommer c_k , les *modules élastiques propres* et les tenseur d'ordre deux $\epsilon^{(k)}$ correspondants aux vecteurs propres $\hat{\epsilon}^{(k)}$, *tenseurs propres* du problème d'élasticité.

En normalisant les vecteurs propres $\hat{\epsilon}^{(k)}$ on obtient les directions propres $\hat{\mathbf{N}}^{(k)}$ avec les propriétés suivantes :

$$\hat{\epsilon}^{(k)} = |\hat{\epsilon}^{(k)}| \hat{\mathbf{N}}^{(k)} \quad |\hat{\epsilon}^{(k)}|^2 = \hat{\epsilon}^{(k)} \cdot \hat{\epsilon}^{(k)} \quad \hat{\mathbf{N}}^{(k)} \cdot \hat{\mathbf{N}}^{(k)} = 1$$

Ces concepts ont été introduits initialement par Kelvin (voir [23]), qui les appelait "les types principaux de contrainte et de déformation".

Généralement on va noter par $\mathbf{A}^{(k)}$ les projections d'un tenseur \mathbf{A} sur les directions des tenseurs propres du problème d'élasticité :

$$\mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}^{(k)}) \mathbf{N}^{(k)}$$

Si un modul propre a l'ordre de multiplicité i , on va noter avec $\mathbf{A}^{(k,k+1,\dots,k+1)}$ la projection du tenseur \mathbf{A} sur le sous-espace propre correspondant à ce module propre. Avec ces notation on écrit l'équation constitutive sous les formes équivalentes :

$$\hat{\sigma} = \sum_{k=1}^6 \sigma^{(k)} = \sum_{k=1}^K c_k \epsilon^{(k)} = \sum_{k=1}^6 c_k \mathbf{N}^{(k)} |\epsilon^{(k)}|$$

et d'une autre part on a l'expression suivante pour le tenseur d'élasticité :

$$\hat{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^6 c_k \mathbf{N}^{(k)} \otimes \mathbf{N}^{(k)}$$

On appelle une direction $\mathbf{N}^{(k)}$ *isochorique* si $tr \mathbf{N}^{(k)} = 0$, et *dilatationnelle* autrement.

C'est intéressant de discuter la relation entre les 6 modules élastiques propres et les 21 modules caractérisant le tenseur d'élasticité dans le cas général d'anisotropie, car 21 modules élastiques ne peuvent pas être complètement déterminés par 6 modules propres.

Pour caractériser complètement le tenseur d'élasticité à l'aide des modules et directions propres Cowin et Mehrabadi [23] ont introduit le concept de *distributeur élastiques*. Les distributeurs élastiques sont des rapports des modules élastiques C_{ijkl} , et peuvent être considérés comme des généralisations du coefficient de Poisson. Ils peuvent être calculés à partir des 12 valeurs : $tr \mathbf{N}^{(k)}$ et $tr \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{N}^{(k)}$, $k = 1, 6$, où $\mathbf{N}^{(k)}$ sont les directions élastiques (tenseurs propres orthonormaux).

On a caractérisé ainsi $6 + 12 = 18$ modules propres, les 3 restant jusqu'à 21 sont déterminés par le choix particulier du système de référence et sont appelés paramètres d'orientation.

De ce point de vue on caractérise les symétries élastiques en deux catégories, celles qui sont complètement déterminées par les modules propres comme l'isotropie et la symétrie cubique, et celles qui demande la connaissance des distributeurs élastiques ou des paramètres d'orientation comme les symétries orthotropes, hexagonales, tétraogonales, trigonales, ...

On présente dans la suite l'expression complète des modules élastiques pour l'élasticité isotrope et à symétrie cubique. D'autres symétries étant présentées dans [22, 23].

La symétrie cubique est complètement caractérisée par 3 modules élastiques λ, μ et β reliés à $\hat{\mathbf{C}}$ par :

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2(\mu - \beta) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2(\mu - \beta) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2(\mu - \beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

Le premier module élastique propre est $c_1 = 3\lambda + 2(\mu - \beta)$ et il est associé à la partie sphérique propre du tenseur (direction dilatationnelle) ϵ :

$$\epsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}tr(\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}tr(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}tr(\epsilon) \end{bmatrix}$$

Le deuxième tenseur propre est associé au module propre $c_2 = 2(\mu - \beta)$ et représente une distortion isochorique :

$$\epsilon^{(2,3)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \frac{1}{3}tr(\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} - \frac{1}{3}tr(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} - \frac{1}{3}tr(\epsilon) \end{bmatrix}$$

Le dernier tenseur propre est un cisaillement isochorique et est il est relié au troisième module propre $c_3 = 2\mu$:

$$\epsilon^{(4,5,6)} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que le cas de l'élasticité isotrope peut être obtenu du cas à symétrie cubique en mettant $\beta = 0$. On aura donc deux modules propres indépendants $\eta = 3\lambda + 2\mu$ le module de déformation volumique et $\omega = 2\mu$ le module de cisaillement. Les tenseurs propres associés sont la partie sphérique (direction dilatationnelle) :

$$\epsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}tr(\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}tr(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}tr(\epsilon) \end{bmatrix}$$

et respectivement la partie déviatorique du tenseur (direction isochorique) :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(2,3,4,5,6)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\epsilon}) & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\epsilon}) & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\epsilon}) \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'aluminium et de cuivre on a les modules élastiques suivants :

$$\begin{aligned} \lambda^{Al} &= 47.10^9 Pa & \mu^{Al} &= 25.10^9 Pa & \beta^{Al} &= 0. \\ \lambda^{Cu} &= 121.10^9 Pa & \mu^{Cu} &= 75.10^9 Pa & \beta^{Cu} &= 51.10^9 Pa \end{aligned}$$

Les modules propres ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} c_1^{Al} &= 1.19 \cdot 10^{11} Pa & c_2^{Al} &= c_3^{Al} = 5.10^{10} \\ c_1^{Cu} &= 411.10^9 Pa & c_2^{Cu} &= 47.10^9 & c_3^{Cu} &= 150.10^9 Pa \end{aligned} \quad (A.2)$$

A.2 Analyse spectrale et fonction de Green

Dans ce qui suit, on va commencer d'abord en rappelant quelques notions et propriétés d'un corps élastique en vibrations libres [62, 45]. Ensuite, utilisant ces propriétés on va construire une solution fondamentale (fonction de Green) pour le corps élastique de dimensions finies comme somme des modes propres de vibration. La solution fondamentale obtenue ainsi, est égale à la solution fondamentale donnée par Kupradze [45] par une autre méthode. Ces considérations vont permettre à la fin de donner une représentation intégrale de l'inverse de l'application de Dirichlet-Neumann. Le raisonnement va suivre une construction similaire, qui fournit une solution fondamentale pour le problème électrique [33].

On désigne par \mathcal{L} l'opérateur de Lamé, défini pour un champ de déplacements \mathbf{u} par la relation :

$$\mathcal{L}[\mathbf{u}] = -\operatorname{div} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

On va nommer *solution caractéristique* une paire fréquence propre - mode propre de vibration, (ω, \mathbf{w}) . Ce couple est une solution du système :

$$\mathcal{L}[\mathbf{w}] = \omega \mathbf{w} \quad (\text{A.4})$$

avec les conditions aux limites sur $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ ($\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$) :

$$\mathbf{w}|_{\partial\Omega_1} = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})\mathbf{n}|_{\partial\Omega_2} = \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$

et une condition de normalité pour \mathbf{w} :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx = 1 \quad (\text{A.6})$$

Il faut remarquer que les fonctions propres de l'opérateur de Lamé correspond vraiment aux modes propres de vibrations du corps seulement si le corps est à densité de masse homogène. Dans la suite on va se situer dans ce cas privilégié. Il est bien connu [62], que les fréquences propres forment une suite croissante, tendant vers $+\infty$:

$$0 \leq \omega_0 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_m \leq \dots \quad (\text{A.7})$$

et les modes propres \mathbf{w}_m une base hilbertienne orthonormale dans l'espace des fonctions à dérivée de carré intégrable $H^1(\Omega)$. En ce qui concerne ω_0 on rencontre deux situations :

- $\omega_0 > 0$ si et seulement si la partie $\partial\Omega_1$ est de mesure non-nulle
- $\omega_0 = 0$ si et seulement si la partie $\partial\Omega_1$ est de mesure nulle. Dans ce cas le corps est libre et tous les déplacements rigides normalisés par (A.6) sont des modes propres.

Dans la suite on se situe dans le cas des vibrations libres, $\partial\Omega_1 = 0$. Les déplacements rigides associés à $\omega_0 = 0$, forment un sous-espace de dimension 6. Une base du sous-espace est donnée par trois translation et trois rotations.

On va démontrer maintenant au sens des distributions l'égalité suivante :

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{e}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{w}^k(\mathbf{x})w_i^k(\mathbf{y}) \quad (\text{A.8})$$

Soit \mathbf{v} une fonction dans $C^\infty(\Omega)$. D'une part on a la définition de la distribution de Dirac :

$$v_i(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{A.9})$$

D'autre part, en utilisant le développement des composantes $v_i, i = 1, 3$ de \mathbf{v} sur la base des fonctions propres $(\mathbf{w}^k)_{k=1}^{\infty}$ on a les égalités suivantes au sens des distributions :

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{y}) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k w_i^k(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] w_i^k(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{w}^k(\mathbf{x}) w_i^k(\mathbf{y}) \right] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ce qui démontre l'égalité (A.8).

On va définir la fonction suivante :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \mathbf{w}^k(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{w}^k(\mathbf{y}) \quad (\text{A.11})$$

\mathbf{G} est un opérateur Green. Un calcul simple montre que :

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{e}_i \quad (\text{A.12})$$

est une solution fondamentale pour le problème à force massique et frontière libre suivant :

$$\mathcal{L}\mathbf{x}[\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{e}_i - \sum_{k=1}^6 \mathbf{w}^k(\mathbf{x})w_i^k(\mathbf{y}) \quad (\text{A.13})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad (\text{A.14})$$

avec \mathbf{y} un point arbitrairement fixé. Par intégration on peut démontrer que les forces du système sont auto-équilibrées et que donc le système admet une solution unique, la fonction de Green \mathbf{G}_i .

On remarque que cette construction nous a conduit au système considéré par Kupradze [45] dans sa construction d'une solution fondamentale (fonction de Green) pour le domaine borné. L'unicité de la solution du système assure que la solution construite ici à partir des modes propres est égale à la solution de Kupradze construite utilisant des potentiels de simple et double couche.

La solution fondamentale permet de fournir une représentation intégrale sur la frontière pour les déplacements à partir d'un champ de forces donné. Donc une représentation intégrale pour l'inverse de l'application de DN, Λ_C^{-1} .

Soit φ un champ de forces sur $\partial\Omega$, on considère \mathbf{v} la solution unique du problème aux limites suivant :

$$\mathcal{L}\mathbf{x}[\mathbf{v}] = \mathbf{0} \quad (\text{A.15})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi} \quad (\text{A.16})$$

auquel on rajoute les conditions :

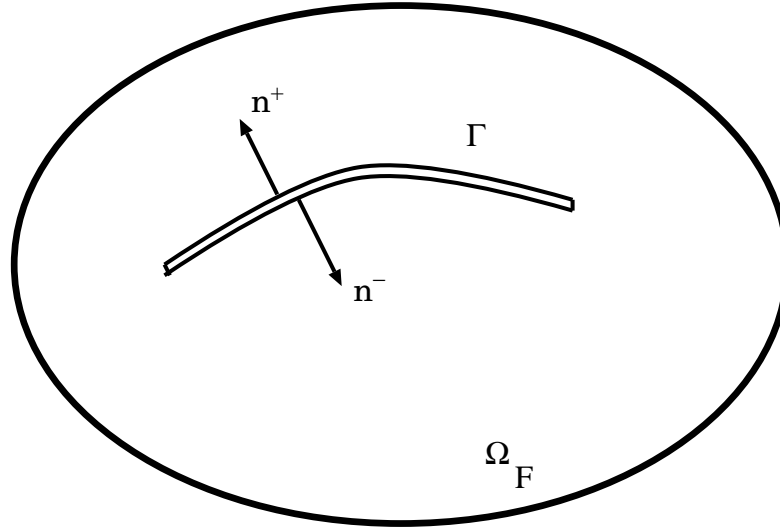
$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{w}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad k = 1, 6 \quad (\text{A.17})$$

Ces conditions enlèvent tout déplacement rigide de la solution \mathbf{v} . En appliquant plusieurs fois le principe du travail virtuel pour \mathbf{G}_i et \mathbf{v} on obtient après une intégration par parties pour $\mathbf{y} \in \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega} [\mathcal{L}\mathbf{x}[\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}\mathbf{x}[\mathbf{v}(\mathbf{x})]\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

En conséquence l'inverse de l'application de DN a la représentation intégrale, comme intégrale singulière en valeur principale de Cauchy [65], suivante :

$$\Lambda_C^{-1}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{A.19})$$


 FIG. A.1 – Le domaine fissuré $\Omega_{\mathbf{F}}$

A.3 Sur l'identification des fissures

Dans cette section on présente une possible application de la formule de réciprocité. Elle traite l'identification d'une fissure et est une prolongation naturelle des travaux de S.Andrieux et A.Benabda [3].

Les relations de réciprocité présentées dans la section 1.3 ont été obtenues dans l'hypothèse implicite que Ω ne contient pas des fissures. Dans ce qui suit on va reprendre ces raisonnements sur $\Omega_{\mathbf{F}} = \Omega - \Gamma$, un corps contenant une fissure Γ . Le problème élastique sur $\Omega_{\mathbf{F}}$ (avec fissure) va être considérée comme une perturbation par rapport au problème élastique sur Ω (sans fissure). Le tenseur d'élasticité \mathbf{C} reste le même dans les points intérieurs des deux domaines. On remarque que pour le problème électrique le problème équivalent a été développé par [3]

Soit (ξ, φ) une paire des mesures sur la frontière $\partial\Omega_{\mathbf{F}}$ du corps fissuré et \mathbf{u} une solution en déplacement correspondantes a ces conditions au limites sur $\Omega_{\mathbf{F}}$. \mathbf{u} est donc solution du problème perturbée dans $\Omega_{\mathbf{F}}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{A.20})$$

avec les conditions aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \xi \quad \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \varphi \quad (\text{A.21})$$

et la condition de bord libre sur les deux lèvres de la fissure Γ^+ et Γ^- :

$$\sigma(\mathbf{u}^+)\mathbf{n}^+ = \mathbf{0} \quad \sigma(\mathbf{u}^-)\mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad (\text{A.22})$$

Soit aussi \mathbf{v} une solution du problème non perturbé sur Ω :

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{A.23})$$

On veut montrer que :

$$\int_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\varphi} \mathbf{v} - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n}] ds = \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} ds \quad (\text{A.24})$$

Le principe des puissances virtuelles pour la solution \mathbf{u} du problème perturbée avec le déplacement virtuel \mathbf{v} s'écrit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} ds + \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{C} \mathbf{u} \mathbf{v} \rrbracket \mathbf{n} dx \quad (\text{A.25})$$

Le même principe donne pour la solution \mathbf{v} du problème non perturbé avec le déplacement virtuel \mathbf{u} :

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n} ds + \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{C} \mathbf{v} \mathbf{u} \rrbracket \mathbf{n} dx \quad (\text{A.26})$$

En additionnant les deux dernières équations et en tenant compte des conditions aux limites et des conditions sur les lèvres de la fissure on obtient la relation désirée.

Une application immédiate de l'équation A.24 est l'identification de la direction d'une fissure plane à partir de mesures $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$ sur la frontière.

Pour une fissure plane, la normale ne dépend pas du point, et donc le problème se réduit à la détermination des directions n_i , $i = 1, 3$, de la normale $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$.

Soit \mathbf{v}^j , $j = 1, 3$ trois solutions du problème non perturbé, alors on a :

$$\int_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}^j - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}^j) \mathbf{n}] ds = n_i \mathbf{e}_i \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}^j) ds$$

si on rajoute la condition :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (\text{A.27})$$

on obtient un système dans les inconnues n_1, n_2, n_3 et $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Gamma}$. Pour les solutions non-perturbées avec un champ de contrainte constant dans Ω , l'inconnue $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Gamma}$ est éliminée et on calcule facilement les directions de la normale.

A.4 Erreurs des calculs de reconstruction

On donne dans la suite les valeurs des erreurs relatives, en volume et en moments entre les modules réels et reconstruits lors des calculs d'identification pour les quatre types d'inclusions : marche (A), carré (B), anneau (C), coin (D) commentés dans la section 3.3. Sauf mention spéciale il s'agit de l'identification d'une inclusion de cuivre dans une matrice d'aluminium sur un maillage 24×24 . Les calculs correspondants à une inclusion d'aluminium dans une inclusion de cuivre sont notés dans les tableaux avec l'indice Al . De la même manière, les calculs faits sur des maillages 12×12 et 36×36 portent un indice m_{12} , respectivement m_{36} .

Dans les tableaux on a représenté les valeurs des trois types d'erreurs définis pour un module réel M_{reel} et un module reconstruit à l'itération i , M_i de manière suivante :

– *erreur relative* :

$$\epsilon_M = \frac{\| M_{reel} - M_i \|}{\| M_{reel} \|} \quad \text{avec :} \quad \| M \| = \left(\int_{\partial\Omega} M^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

– *erreur en volume* :

$$\epsilon_{00} = \frac{v(M_{reel}) - v(M_i)}{v(M_{reel})} \quad \text{avec :} \quad v(M) = \int_{\partial\Omega} M d\mathbf{x}$$

– *erreur en moments* :

$$\epsilon_{10} = \frac{m_x(M_{reel}) - m_x(M_i)}{m_x(M_{reel})} \quad \text{avec :} \quad m_x(M) = \int_{\partial\Omega} x M d\mathbf{x}$$

et respectivement :

$$\epsilon_{01} = \frac{m_y(M_{reel}) - m_y(M_i)}{m_y(M_{reel})} \quad \text{avec :} \quad m_y(M) = \int_{\partial\Omega} y M d\mathbf{x}$$

Inclusion A - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.022	0.040	0.132	0.023	0.035	0.090
1%	0.026	0.040	0.137	0.030	0.039	0.105
5%	0.065	0.048	0.163	0.515	0.473	0.705
10%	0.139	0.078	0.244	0.436	0.823	0.648

Inclusion A - moments						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.106	0.067	0.198	0.079	0.040	0.141
1%	0.107	0.067	0.198	0.083	0.043	0.146
5%	0.132	0.140	0.202	0.300	0.182	0.381
10%	0.128	0.076	0.208	1.901	0.566	1.088

Inclusion B - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.007	0.058	0.206	0.009	0.050	0.156
1%	0.01	0.059	0.209	0.021	0.055	0.165
5%	0.051	0.069	0.229	0.376	0.301	0.575
10%	0.123	0.089	0.264	0.85	2.901	0.755

Inclusion B - moments						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.021	0.046	0.195	0.013	0.037	0.156
1%	0.023	0.046	0.196	0.020	0.040	0.160
5%	0.039	0.053	0.204	0.068	0.065	0.186
10%	0.068	0.090	0.217	0.740	0.773	0.692

Inclusion C - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.007	0.087	0.345	0.010	0.091	0.318
1%	0.007	0.087	0.345	0.010	0.091	0.318
5%	0.051	0.097	0.368	0.368	0.27	0.510
10%	0.121	0.115	0.403	3.568	2.308	1.313

Inclusion C - moments						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.033	0.078	0.339	0.012	0.086	0.300
1%	0.062	0.932	0.351	0.033	0.079	0.227
5%	0.077	0.097	0.353	0.080	0.096	0.250
10%	0.100	0.111	0.356	0.938	3.770	0.767

Inclusion D - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.018	0.042	0.127	0.015	0.031	0.080
1%	0.022	0.043	0.013	0.027	0.034	0.092
5%	0.058	0.053	0.162	1.903	0.930	3.028
10%	0.182	0.501	0.208	0.996	0.888	0.860

Inclusion D - moments						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.057	0.056	0.163	0.048	0.046	0.115
1%	0.059	0.057	0.165	0.054	0.048	0.118
5%	0.071	0.064	0.173	0.375	0.324	0.459
10%	0.093	0.082	0.185	0.801	0.689	0.547

Inclusion A - force - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.017	0.024	0.017	-0.009	-0.020	-0.009	-0.114	-0.132	-0.114
1%	0.017	0.024	0.016	-0.009	-0.020	-0.009	-0.115	-0.134	-0.115
5%	0.021	0.030	0.018	-0.013	-0.026	-0.014	-0.115	-0.139	-0.114
10%	0.015	0.017	-0.001	-0.015	-0.028	-0.010	-0.137	-0.177	-0.168

Inclusion A - force - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.005	0.008	0.005	-0.002	-0.005	0.002	-0.004	-0.003	-0.007
1%	0.004	0.005	0.005	0.005	0.009	0.007	-0.012	-0.017	-0.005
5%	-0.245	-0.310	-0.389	-0.179	-0.163	-0.170	-0.580	-0.659	-0.698
10%	-0.203	-0.136	-0.254	-0.020	-0.016	-0.063	-0.611	-0.658	-0.654

Inclusion A - moments - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.069	0.114	0.069	-0.058	-0.080	-0.058	-0.183	-0.219	-0.183
1%	0.069	0.114	0.070	-0.058	-0.080	-0.058	-0.183	-0.218	-0.184
5%	0.090	0.153	0.109	0.012	0.052	0.078	-0.178	-0.213	-0.183
10%	0.075	0.119	0.078	-0.057	-0.078	-0.058	-0.172	-0.209	-0.182

Inclusion A - moments - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.015	0.024	0.015	-0.017	-0.023	-0.017	0.003	-0.003	0.003
1%	0.016	0.024	0.016	-0.017	-0.023	-0.016	0.005	0.000	0.002
5%	-0.183	-0.233	-0.143	-0.028	-0.007	-0.067	-0.298	-0.345	-0.256
10%	1.298	2.456	1.143	-0.152	-0.110	-0.257	0.416	0.619	0.473

Inclusion B - force - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.003	0.002	0.004	-0.002	0.002	-0.004	-0.169	-0.130	-0.185
1%	0.003	0.002	0.003	-0.002	0.002	-0.004	-0.169	-0.130	-0.185
5%	0.003	0.003	0.002	-0.003	0.001	-0.006	-0.160	-0.124	-0.176
10%	0.012	0.012	0.008	-0.010	-0.004	-0.016	-0.137	-0.105	-0.154
0% $^{Al}_{m36}$	0.034	0.034	0.034	-0.012	-0.016	-0.010	-0.119	-0.122	-0.117
0% $_{m36}$	0.002	0.002	0.003	-0.001	0.002	-0.003	-0.166	-0.127	-0.183

Inclusion B - force - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.000	0.000	0.000	0.004	0.004	0.004	-0.056	-0.040	-0.061
1%	0.000	0.000	-0.001	0.004	0.004	0.003	-0.054	-0.039	-0.058
5%	0.130	0.179	0.211	-0.031	-0.069	-0.024	0.028	0.152	0.099
10%	-0.380	-0.531	-0.348	0.235	0.347	0.735	-0.604	-0.648	-0.624
0% $^{Al}_{m36}$	0.010	0.010	0.009	0.007	0.003	0.006	-0.001	-0.002	-0.004
0% $_{m36}$	-0.001	0.000	-0.001	0.005	0.004	0.005	-0.064	-0.045	-0.070

Inclusion B - moments - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.021	0.016	0.024	-0.022	-0.015	-0.025	-0.164	-0.121	-0.183
1%	0.021	0.016	0.024	-0.021	-0.014	-0.025	-0.164	-0.121	-0.183
5%	0.022	0.017	0.026	-0.020	-0.014	-0.024	-0.163	-0.121	-0.185
10%	0.029	0.027	0.030	0.007	0.040	-0.026	-0.159	-0.118	-0.185
0% $_{m36}$	0.016	0.012	0.018	-0.017	-0.012	-0.020	-0.160	-0.118	-0.179

Inclusion B - moments - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.002	0.001	0.003	0.000	0.000	0.000	-0.036	-0.023	-0.040
1%	0.002	0.002	0.003	0.000	0.001	0.000	-0.036	-0.023	-0.041
5%	0.009	0.009	0.012	-0.006	-0.004	-0.010	-0.025	-0.014	-0.033
10%	-0.615	-0.749	-0.620	-0.213	-0.130	-0.141	-0.612	-0.694	-0.610
0% $_{m36}$	0.000	0.000	0.000	0.002	0.002	0.002	-0.047	-0.032	-0.052

Inclusion C - force - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.005	0.005	0.005	0.000	0.000	0.000	-0.193	-0.193	-0.193
1%	0.005	0.005	0.005	0.000	0.000	0.000	-0.193	-0.193	-0.193
5%	0.006	0.006	0.004	-0.002	-0.002	-0.002	-0.183	-0.185	-0.184
10%	0.015	0.016	0.010	-0.009	-0.009	-0.012	-0.160	-0.164	-0.163
0% m_{12}	0.004	0.004	0.004	0.000	0.000	0.000	-0.130	-0.130	-0.130

Inclusion C - force - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.001	0.001	0.001	0.008	0.008	0.008	-0.108	-0.108	-0.108
1%	0.001	0.001	0.001	0.008	0.008	0.008	-0.108	-0.108	-0.108
5%	0.174	0.153	0.288	0.011	0.013	0.045	-0.054	-0.093	-0.005
10%	0.899	-0.021	0.885	0.351	-0.063	-0.133	0.536	0.075	0.631
0% m_{12}	0.002	0.002	0.002	0.006	0.006	0.006	-0.053	-0.053	-0.053

Inclusion C - moments - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.033	0.033	0.033	-0.025	-0.025	-0.025	-0.196	-0.196	-0.196
1%	0.062	0.054	0.054	-0.045	-0.040	-0.040	-0.233	-0.223	-0.223
5%	0.062	0.054	0.054	-0.045	-0.040	-0.040	-0.233	-0.223	-0.223
10%	0.067	0.058	0.060	-0.050	-0.054	-0.040	-0.228	-0.219	-0.226
0% m_{12}	0.030	0.030	0.030	-0.024	-0.024	-0.024	-0.136	-0.136	-0.136

Inclusion C - moments - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	-0.106	-0.106	-0.106
1%	0.012	0.008	0.008	-0.001	0.000	0.000	-0.048	-0.050	-0.050
5%	0.019	0.016	0.017	-0.006	-0.004	-0.007	-0.035	-0.037	-0.046
10%	-0.399	-0.289	-0.529	2.943	3.754	2.082	-0.624	-0.599	-0.662
0% m_{12}	0.010	0.010	0.010	0.000	0.000	0.000	-0.052	-0.052	-0.052

Inclusion D - force - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.011	0.018	0.012	-0.006	-0.016	-0.007	-0.091	-0.117	-0.095
1%	0.011	0.018	0.011	-0.006	-0.016	-0.007	-0.092	-0.119	-0.096
5%	0.013	0.021	0.012	-0.008	-0.019	-0.010	-0.093	-0.127	-0.097
10%	-0.022	-0.051	-0.075	-0.408	-0.716	-0.830	-0.076	-0.118	-0.084
0% At_{m24}	0.026	0.021	0.025	-0.015	-0.008	-0.014	-0.141	-0.133	-0.140
0% At_{m36}	0.028	0.022	0.028	-0.016	-0.008	-0.015	-0.151	-0.141	-0.150

Inclusion D - force - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.004	0.005	0.004	0.000	-0.002	0.000	-0.015	-0.020	-0.016
1%	0.004	0.005	0.003	0.000	-0.002	0.000	-0.015	-0.021	-0.016
5%	1.299	2.410	1.280	-0.131	0.197	-0.187	2.500	3.496	2.447
10%	0.000	-0.117	-0.237	0.076	0.007	0.146	-0.493	-0.632	-0.583
0% At_{m24}	-0.033	-0.009	-0.011	-0.012	-0.016	-0.015	-0.214	-0.128	-0.159
0% At_{m36}	0.002	0.000	0.002	-0.001	0.001	-0.002	-0.014	-0.017	-0.011

Inclusion D - moments - iteration 5									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.041	0.078	0.042	-0.040	-0.058	-0.042	-0.139	-0.185	-0.143
1%	0.042	0.078	0.043	-0.040	-0.058	-0.041	-0.139	-0.185	-0.144
5%	0.043	0.079	0.045	-0.042	-0.062	-0.042	-0.138	-0.184	-0.146
10%	0.051	0.090	0.052	-0.025	-0.032	-0.039	-0.132	-0.179	-0.146
0% At_{m24}	0.108	0.076	0.107	-0.087	-0.076	-0.086	-0.226	-0.211	-0.224
0% At_{m36}	0.100	0.069	0.099	-0.086	-0.074	-0.086	-0.232	-0.216	-0.231

Inclusion D - moments - iteration 17									
	E			ν			G		
bruit	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}	ϵ_{00}	ϵ_{10}	ϵ_{01}
0%	0.015	0.024	0.015	-0.017	-0.023	-0.018	-0.001	-0.009	-0.001
1%	0.015	0.024	0.015	-0.016	-0.022	-0.017	-0.002	-0.010	-0.003
5%	-0.277	-0.344	-0.211	-0.156	-0.126	-0.201	-0.240	-0.301	-0.161
10%	-0.443	-0.514	-0.516	-0.157	-0.241	-0.190	-0.396	-0.389	-0.389
0% At_{m24}	0.023	0.018	0.024	-0.024	-0.023	-0.024	0.016	0.019	0.016
0% At_{m36}	0.029	0.021	0.029	-0.027	-0.024	-0.026	0.025	0.028	0.025

Annexe B

Mesure des contraintes résiduelles

B.1 Mesures non destructives

Les contraintes résiduelles sont des contraintes existantes dans un corps en absence d'un chargement extérieur. En conséquence elles satisfont aux équations d'équilibre et à une condition aux limites de frontière libre. La forme du corps influence directement la distribution des contraintes résiduelles par la condition de frontière libre.

Les contraintes résiduelles sont présentes dans les corps, dans des configurations déchargées comme conséquence du processus de fabrication ou de l'histoire de chargement. Selon la distribution locale des contraintes résiduelles et du chargement extérieur, le rôle des contraintes résiduelles peut-être néfaste, en provoquant la fatigue ou la rupture, ou bénéfique en arrêtant la propagation des fissures. En conséquence l'étude des contraintes résiduelles a une importance majeure pour le comportement des structures.

Les contraintes résiduelles sont généralement connues par une modélisation numérique du processus qui les a induites en partant d'une configuration naturelle du corps. En pratique, on se trouve devant une histoire de chargement inconnue, un processus de fabrication inconnu ou difficilement modélisable, ou dans l'impossibilité de définir une configuration déchargée du corps. Dans ces cas, les contraintes résiduelles peuvent être déterminées seulement par des mesures expérimentales.

Le problème des mesures des contraintes en général, et des contraintes résiduelles en particulier, est l'absence des mesures directes. On mesure donc l'influence des contraintes sur d'autres grandeurs mécaniques.

La méthode la plus répandue pour la mesure des contraintes résiduelles est la technique des rayons X, qui relie la déformation du réseau cristallin (mesuré par diffractométrie X) à la contrainte résiduelle en chaque point de la surface d'un solide. Pour déterminer la contrainte en un point intérieur du corps on est obligé d'enlever de la matière pour arriver au point désiré. Ce processus rend d'une part la méthode destructive et induit d'autre part une redistribution des contraintes de manière que la contrainte résiduelle mesurée diffère de la contrainte résiduelle avant l'enlèvement de matière. Ce problème est étudié dans l'annexe B.2.

Dans cette annexe on présente une linéarisation des équations de l'élasticité autour d'un état initial contenant une contrainte résiduelle. A l'aide de cette équation constitutive linéaire on donne une nouvelle formulation au problème d'identification non-destructive des contraintes résiduelles et on propose une méthode de résolution pour ce problème.

Dans ce qui suit on présente une équation constitutive élastique linéaire qui tient compte de la présence des contraintes résiduelles. Ensuite on examine brièvement la possibilité d'utiliser cette équation constitutive pour l'identification non destructive des contraintes résiduelles.

B.1.1 Etat de contrainte résiduelle

On va définir les *contraintes résiduelles* comme le champ des contraintes $\overset{o}{\sigma}$ supportées par un solide Ω , en absence des forces extérieures dans un système de référence initial fixé. Sans aucune hypothèse sur le processus qui a créé les contraintes résiduelles on va mettre en évidence quelques propriétés générales de ce champ.

Compte tenu de l'absence des forces extérieures, le champ de contrainte résiduelle doit satisfaire l'équation d'équilibre :

$$\text{div } \overset{o}{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{B.1})$$

et une condition des tractions nulles sur la frontière $\partial\Omega$:

$$\overset{o}{\sigma} \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad (\text{B.2})$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$. C'est aussi important de mentionner la symétrie du champ des contraintes résiduelles :

$$\overset{o}{\sigma} = \overset{o}{\sigma}^T \quad (\text{B.3})$$

car dans la suite on va utiliser des contraintes comme celle de Boussinesq qui ne sont pas symétriques.

Une première information sur les contraintes résiduelles peut être obtenue en calculant une moyenne volumique de ce champ :

$$\overset{o}{\sigma}_M(\Omega) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \overset{o}{\sigma} \, dx \quad (\text{B.4})$$

avec $|\Omega|$ le volume du solide. Utilisant des théorèmes de type Stokes pour l'intégration par parties on obtient la forme suivante pour la moyenne des contraintes résiduelles :

$$\overset{o}{\sigma}_M(\Omega) = \frac{1}{|\Omega|} \left[\int_{\Omega} (\mathbf{p} - \overset{o}{p}) \otimes (\overset{o}{\sigma} \mathbf{n}) \, ds(\mathbf{p}) - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{p} - \overset{o}{p}) \otimes (\text{div } \overset{o}{\sigma}) \, dx(\mathbf{p}) \right] \quad (\text{B.5})$$

avec $\overset{o}{p}$ un point de référence fixé. Tenant compte de l'équation d'équilibre (B.1) et des conditions aux limites (B.2) on obtient :

$$\overset{o}{\sigma}_M(\Omega) = \mathbf{0} \quad (\text{B.6})$$

i.e. *la contrainte résiduelle moyenne est toujours nulle*. La conclusion immédiate de ce fait est que dans un corps de dimensions finies les composantes cartésiennes de $\overset{o}{T}$ doivent prendre des valeurs positives et négatives, donc un champ des contraintes résiduelles ne peut pas être uniforme.

B.1.2 Equation élastique linéaire

Dans la suite on va s'intéresser seulement aux déformations du corps à partir de la configuration initiale. On va considérer une équation de l'élasticité finie, qui s'exprime pour la contrainte de Boussinesq Θ sous la forme :

$$\Theta = \tilde{\Theta}(\mathbf{F}) \quad (\text{B.7})$$

où \mathbf{F} est le gradient de la transformation. On va supposer que le gradient du déplacement :

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u}$$

est petit, de manière à pouvoir négliger les termes en \mathbf{H} d'ordre supérieur à 1 dans les développements des fonctions. Dans cette hypothèse on peut écrire l'équation constitutive B.7 au premier ordre sous la forme :

$$\begin{aligned} \Theta &= \tilde{\Theta}(\mathbf{F}) = \tilde{\Theta}(\mathbf{I} + \mathbf{H}) \\ &= \tilde{\Theta}(\mathbf{I}) + D_{\mathbf{F}}\tilde{\Theta}(\mathbf{I})\mathbf{H} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ou $D_{\mathbf{F}}\tilde{\Theta}(\mathbf{I})$ est la dérivée de Fréchet de $\tilde{\Theta}$ par rapport à \mathbf{F} calculée sur la configuration initiale. On remarque que $\tilde{\Theta}(\mathbf{I})$ est la contrainte sur la configuration initiale est donc égale à la contrainte résiduelle $\overset{o}{\sigma}$, et que l'application linéaire $D_{\mathbf{F}}\tilde{\Theta}(\mathbf{I})$ peut être représentée par un tenseur d'ordre quatre, qu'on va noter $\mathbf{C}[\overset{o}{\sigma}]$. Pour distinguer \mathbf{C} du tenseur habituel d'élasticité, qui ne dépend pas de la contrainte résiduelle on va le nommer pseudo-tenseur de l'élasticité. Avec ces notations l'équation constitutive de l'élasticité linéaire avec des contraintes résiduelles s'écrit sous la forme :

$$\Theta = \overset{o}{\sigma} + \mathbf{C}[\overset{o}{\sigma}]\mathbf{H} \quad (\text{B.9})$$

Le premier à formuler cette équation est Cauchy dans ses *Exercices de mathématiques* [20]. Il a explicité la dépendance du pseudo-tenseur de l'élasticité $\mathbf{C}[\overset{o}{\sigma}]$ de la contrainte résiduelle à l'aide du principe d'objectivité.

Dans ce travail on va se référer à deux approches plus récentes, l'une due à Mandel [53] et l'autre due à Hoger [28]. Pour faciliter la comparaison on va noter les quantités correspondantes à l'un ou l'autre approche par M respectivement H .

L'approche de Mandel part d'une expression de la densité d'énergie (correspondante à la contrainte de Piola-Kirchoff) développée jusqu'au deuxième ordre inclus :

$$\pi(\mathbf{E}) = \overset{o}{\sigma} : \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{L}^M \mathbf{E} \quad (\text{B.10})$$

où $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ est le tenseur de déformation de Green-Lagrange, et \mathbf{L}^M est un tenseur d'ordre quatre symétrique. Cette forme assure que le principe d'objectivité est respecté.

Il est important de remarquer en ce point, qu'on n'a pas supposé que \mathbf{L}^M est indépendant de la contrainte résiduelle $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$.

A partir de la densité d'énergie la contrainte de Boussinesq s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{F} D_{\mathbf{E}} \pi(\mathbf{E}) \quad (\text{B.11})$$

Après on peut remplacer la déformation de Green-Lagrange \mathbf{E} avec la petite déformation $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla^T \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u})$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta} &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{H} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\omega} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\epsilon} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

avec $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T)$ et $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$. Pour calculer la contrainte de Cauchy utilisons la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F} \quad (\text{B.13})$$

ou $J = \det \mathbf{F}$ et J^{-1} peut être remplacé par $1 - \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}$ dans l'approximation des petites déformations. En développant les produits on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\omega} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\epsilon} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B.14})$$

Revenons maintenant à l'expression du pseudo-tenseur de l'élasticité. La composante d'indice $ijkl$ du pseudo-tenseur d'élasticité a l'expression suivante :

$$C_{ijkl}^M[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] = \overset{\circ}{\sigma}_{jl} \delta_{ik} + L_{ijkl}^M \quad (\text{B.15})$$

Entre les parties symétrique et anti-symétrique du gradient des déplacements et celles du $\mathbf{C}^M[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] \nabla \mathbf{u}$ on a les relations suivantes :

- $\mathbf{C}^M[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$, pour chaque $\boldsymbol{\omega}$ anti-symétrique ;
- $\text{asym} \mathbf{C}^M[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon})$ pour chaque $\boldsymbol{\epsilon}$ symétrique ;
- $\text{sym} \mathbf{C}^M[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon}$ pour chaque $\boldsymbol{\epsilon}$ symétrique.

L'approche de Hoger [28, 29, 30] est différente. Elle part pratiquement de la formule :

$$\boldsymbol{\Theta} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] \mathbf{H} \quad (\text{B.16})$$

en considérant :

$$\mathbf{C}[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] \cdot \mathbf{H} = D_{\mathbf{F}} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{I}) \mathbf{H} \quad (\text{B.17})$$

La forme particulière de $\mathbf{C}[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}]$ est obtenue en utilisant le principe d'objectivité et la symétrie du tenseur de Cauchy, qui fournissent les deux propriétés suivantes :

- $\mathbf{C}^H[\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}] \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$, pour chaque $\boldsymbol{\omega}$ anti-symétrique ;

– $asym\mathbf{C}^H[\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}]\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} - \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon})$ pour chaque $\boldsymbol{\epsilon}$ symétrique ;
 Hoger définit directement \mathbf{L}^H à l'aide de la partie symétrique du pseudo-tenseur de l'élasticité, soit :

$$\mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon} = sym\mathbf{C}^H[\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}]\boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B.18})$$

pour chaque $\boldsymbol{\epsilon}$ symétrique. Suite à ces considérations on peut exprimer la composante d'indice $ijkl$ du pseudo-tenseur d'élasticité dans la forme :

$$C_{ijkl}^H[\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}] = \frac{3}{4} \overset{o}{\sigma}_{jl} \delta_{ik} - \frac{1}{4} \overset{o}{\sigma}_{kj} \delta_{il} - \frac{1}{4} \overset{o}{\sigma}_{ik} \delta_{lj} - \frac{1}{4} \overset{o}{\sigma}_{il} \delta_{jk} + L_{ijkl}^M \quad (\text{B.19})$$

Ce qui conduit à l'expression suivante pour la contrainte de Boussinesq :

$$\boldsymbol{\Theta} = \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\omega} \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} - \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{L}^H \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B.20})$$

et à l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\omega} \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} - \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon}) - (tr\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{L}\boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B.21})$$

pour la contrainte de Cauchy.

En comparant les résultats des deux approches on remarque que la seule différence se trouve dans la partie symétrique du pseudo-tenseur de l'élasticité. On a :

– dans l'approche de Mandel :

$$sym\mathbf{C}^M[\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}]\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon}$$

– dans l'approche de Hoger :

$$sym\mathbf{C}^H[\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}]\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}^H \boldsymbol{\epsilon}$$

Comme on n'a pas fait aucune hypothèse sur la dépendance de \mathbf{L}^M ou \mathbf{L}^H de la contrainte résiduelle, on a obtenue deux modèles similaires, car on peut considérer :

$$\mathbf{L}^H \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon}) \quad (\text{B.22})$$

Néanmoins il est important de déterminer la partie du pseudo-tenseur de l'élasticité qui ne dépend pas des contraintes résiduelles car elle représente les modules élastiques du corps en absence des contraintes résiduelles. Cette question reste encore ouverte. D'un point de vue pratique la solution est de postuler par exemple que \mathbf{L}^M ou \mathbf{L}^H sont exactement les modules élastiques du corps.

Avec les notations précédentes les équations fondamentales de l'élasticité linéaire avec des contraintes résiduelles ont, dans le cas statique, en Ω , la forme suivante :

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \\ \omega &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u}) \\ \Theta &= \overset{o}{\sigma} + \mathbf{C}[\overset{o}{\sigma}] : \mathbf{H} \\ \text{div} \Theta &= 0\end{aligned}\tag{B.23}$$

où le pseudo-tenseur de l'élasticité $\mathbf{C}[\overset{o}{\sigma}]$ est soit celui de Mandel soit celui de Hoger. On rappelle que la contrainte résiduelle doit aussi satisfaire aux équations (B.1) et (B.2). En conséquence, les conditions aux limites en forces imposées s'écrivent pour la contrainte de Boussinesq sous une forme simplifiée. On a :

– dans l'approche Mandel :

$$\Theta^M \mathbf{n} = (\mathbf{L}^M \cdot \epsilon) \mathbf{n}\tag{B.24}$$

– dans l'approche Hoger :

$$\Theta^H \mathbf{n} = \left(-\frac{1}{2} \overset{o}{\sigma} \epsilon + \mathbf{L}^H \epsilon\right) \mathbf{n}\tag{B.25}$$

Pour les conditions aux limites exprimées à l'aide de la contrainte de Cauchy on obtient les mêmes expressions, car le terme au premier ordre en \mathbf{H} de la traction est le même pour les deux contraintes.

B.1.3 Problème d'identification des contraintes résiduelles

Les équations du paragraphe précédent ont mis en évidence l'influence des contraintes résiduelles sur le comportement élastique linéaire d'un solide. Les équations ont été déduites (voir [28, 52, 53]) après une linéarisation soignée des équations de l'élasticité finie. La contrainte résiduelle devient ainsi une quantité constitutive, caractérisant le comportement de la même manière que les modules élastiques ou la densité. Il est important de remarquer que les modifications apportées par la présence de la contrainte résiduelle sur les équations de l'élasticité linéaire sont du même ordre de grandeur que le rapport $\overset{o}{\sigma} / \mathbf{L} \approx 10^{-2} - 10^{-4}$. Les mesures supposent donc une métrologie de haute précision. Néanmoins, regardons dans la suite l'importance de ces équations pour l'identification non destructive des contraintes résiduelles.

Parmi les méthodes expérimentales utilisées actuellement, seulement l'acousto-élasticité (les méthodes ultra-sonores, voir [60, 52]) tiennent compte d'une relation entre la contrainte résiduelle et les modules élastiques. La relation est donnée par le biais de la vitesse de propagation des ondes ultra-sonores qui dans ce cas

dépend du pseudo-tenseur de l'élasticité. C'est intéressant de remarquer que la plupart des expériences menées actuellement sont fondées sur une théorie qui suppose que le corps est hyperélastique et que la contrainte mesurée provient d'un chargement élastique à partir d'une configuration naturelle déchargée du corps. Il est évident que ce n'est pas le cas avec les contraintes résiduelles qui sont produites par des déformations incompatibles (thermiques ou plastiques). Ce point a été mis en évidence dans un travail de Man et Lu [52], qui ont développé ensuite une théorie acousto-élastique fondée sur les équations présentées dans le paragraphe précédent. Leur théorie permet d'identifier des champs de contraintes résiduelles *homogènes* dans quelques cas simples, par exemple si on se place dans le repère des directions principales des contraintes résiduelles ou s'il s'agit d'une plaque mince.

La difficulté majeure qui reste encore non-résolue est l'identification des contraintes résiduelles, *inhomogènes*.

Regardons dans la suite un résultat théorique d'identification des contraintes résiduelles et *inhomogènes* des modules élastiques *homogènes* due à Hoger [28]. Il va suggérer une formulation du problème d'identification des contraintes résiduelles dans le cas inhomogène. Une méthode possible de résolution pour ce problème va être présentée dans le paragraphe suivant.

Considérons un cylindre élastique de rayon r_0 et de hauteur z_0 contenant dans la configuration initiale un champ de contrainte résiduelle de la forme suivante :

$$\overset{o}{\sigma}(r, \theta) = \begin{bmatrix} \overset{o}{\sigma}_{rr}(r, \theta) & \overset{o}{\sigma}_{r\theta}(r, \theta) & 0 \\ \overset{o}{\sigma}_{r\theta}(r, \theta) & \overset{o}{\sigma}_{\theta\theta}(r, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où (r, θ, z) désignent les coordonnées cylindriques. Le pseudo-tenseur d'élasticité est donné par l'approche de Hoger, et on va supposer que les modules élastiques du corps sont $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ liés à \mathbf{L}^H par :

$$\mathbf{L}^H \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\lambda} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + \bar{\mu} \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B.26})$$

A partir de deux solutions universelles¹ du système B.23 dans l'approche de Hoger, on va identifier d'un part les modules élastiques $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ supposées homogènes et d'autre part la distribution de contrainte résiduelle.

La solution qui permet l'identification des modules élastiques correspond à une compression axiale du cylindre entre deux blocs rigides et a la forme suivante :

$$\mathbf{u} = 2\eta r \mathbf{e}_r + \gamma z \mathbf{e}_z$$

Avec la condition de frontière latérale libre des contraintes, qui s'écrit :

$$2\bar{\mu}\eta + \bar{\lambda}(2\eta + \gamma) = 0$$

¹Une solution universelle est un champ de déplacements qui peut être maintenus dans un corps seulement à l'aide des tractions en surface [28].

on obtient les modules élastiques suivantes :

$$\bar{\mu} = \frac{-t_z}{2(\eta - \gamma)} \quad \bar{\lambda} = \frac{\eta t_z}{(\eta - \gamma)(2\eta + \gamma)}$$

où t_z est la pression axiale appliquée. On remarque que la contrainte résiduelle n'intervient pas dans cette solution. On peut seulement conclure que l'expérience de compression ne peut pas indiquer la présence ou l'absence d'une contrainte résiduelle de la forme $\overset{\circ}{\sigma}(r, \theta)$.

Pour identifier la contrainte résiduelle Hoger a utilisé une solution représentant une rotation entre deux massifs rigides collés aux extrémités du cylindre, dont le champ des déplacements est de la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \alpha r z \mathbf{e}_\theta$$

Si on suppose que t_θ , la distribution de la composante θ du vecteur de traction $\mathbf{t} = \Theta \mathbf{n}$, est connue dans chaque point de l'extrémité du cylindre, alors la contrainte résiduelle est complètement déterminée par t_θ , l'angle de torsion α et le module de cisaillement μ , comme il est montré par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{rr}(r, \theta) &= \frac{4\mu}{r}(r - r_0) - \frac{4}{\alpha r} \int_{r_0}^r \frac{t_\theta(t, \theta)}{t} dt - \frac{4}{\alpha r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_{r_0}^r \int_{r_0}^\rho \frac{t_\theta(t, \theta)}{t} dt d\rho \\ \overset{\circ}{\sigma}_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{4}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{r_0}^r \frac{t_\theta(t, \theta)}{t} dt - \frac{4}{\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{r_0}^r \int_{r_0}^\rho \frac{t_\theta(t, \theta)}{t} dt d\rho \\ \overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta}(r, \theta) &= 4\mu - \frac{4}{\alpha r} t_\theta(t, \theta) \end{aligned}$$

Cet exemple montre qu'il est possible d'identifier une distribution des contraintes résiduelles à partir de la mesure de déplacements (la rotation) et des forces (le vecteur de traction) sur la frontière.

Comme dans l'identification des modules élastiques (voir chapitre 1) on peut considérer l'application DN :

$$\Lambda_{\mathbf{L}, \overset{\circ}{\sigma}} : \mathbf{u}|_{\partial\Omega} \longrightarrow \Theta \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$$

qui pour une distribution de modules élastiques et une distribution des contraintes résiduelles fixées associe à chaque déplacement sur la frontière la force imposée correspondante. Le problème d'identification des contraintes résiduelles devient ainsi :

$$\text{Déterminer } \overset{\circ}{\sigma} \text{ connaissant } \mathbf{L} \text{ et } \Lambda_{\mathbf{L}, \overset{\circ}{\sigma}}$$

L'étude d'identification des modules élastiques conduit à imaginer une identification des contraintes résiduelles faite en deux temps : détermination du pseudo-tenseur de l'élasticité $\mathbf{C}[\overset{\circ}{\sigma}]$ en tout point du solide, puis identification de $\overset{\circ}{\sigma}$ à partir de $\mathbf{C}[\overset{\circ}{\sigma}]$.

On remarque, que l'application des méthodes de résolution, comme celle présentée au chapitre 2, n'est pas directement possible. Ce fait nous a amené à proposer une autre méthode pour la résolution de ce problème qui va être présentée dans la suite.

B.1.4 Méthode de l'état adjoint

Soit $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$ une distribution des déplacements et des forces mesurés sur la frontière d'un corps contenant dans la configuration initiale une contrainte résiduelle $\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}$. On va supposer dans la suite que le tenseur de l'élasticité en absence des contrainte résiduelles \mathbf{L} est connu.

Pour un champ des contraintes résiduelles $\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}$ fixé arbitrairement on considère le champ des déplacements \mathbf{v} obtenue dans le corps lorsqu'on imposé la force $\boldsymbol{\varphi}$ sur la frontière $\partial\Omega$. \mathbf{v} est alors solution du problème d'équilibre de la variation de contrainte de Boussinesq entre l'état initial et celui associé au déplacement \mathbf{v} . L'équation correspondante sur Ω est :

$$\text{div}(\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}]\nabla\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{B.27})$$

à laquelle on ajoute la condition aux limites sur $\partial\Omega$:

$$(\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}]\nabla\mathbf{v})\mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} \quad (\text{B.28})$$

Ce problème est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$-\int_{\Omega} \nabla\mathbf{w} : \{\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}]\nabla\mathbf{v}\}dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} : \{(\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}]\nabla\mathbf{v})\mathbf{n}\}ds = 0 \quad (\text{B.29})$$

pour chaque champ admissible \mathbf{w} .

En contrôlant $\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}$ on va faire correspondre le champ des déplacements calculées \mathbf{v} avec les mesures $\boldsymbol{\xi}$ sur la frontière $\partial\Omega$. Ceci conduit à rendre minimum la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{v}|^2 ds \quad (\text{B.30})$$

Il est évident que le déplacement associé à la contrainte résiduelle $\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}$ est un minimum de la fonctionnelle \mathcal{I} . Le problème d'identification devient ainsi un problème de minimisation sous contrainte :

Minimiser $\mathcal{I}(\mathbf{v})$ sous la contrainte : \mathbf{v} solution de (B.29).

Le paramètre de contrôle de la minimisation étant la contrainte résiduelle $\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}$, qui intervient dans l'équation (B.29).

D'un point de vue pratique il serait intéressant de connaître explicitement la dérivée de \mathcal{I} par rapport à $\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}$. Ceci est possible si on procède de la manière suivante :

Soit $\mathcal{L}(\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{I} - \int_{\Omega} \nabla\mathbf{w} : \{\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}]\nabla\mathbf{v}\}dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} : \{(\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}]\nabla\mathbf{v})\mathbf{n}\}ds \quad (\text{B.31})$$

On remarque que l'équation (B.29) est équivalente à :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} \cdot \delta \mathbf{w} = 0 \quad (\text{B.32})$$

pour tout $\delta \mathbf{w}$.

On choisit \mathbf{w} de façon que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.33})$$

pour tout $\delta \mathbf{v}$. Soit en explicitant le système adjoint pour \mathbf{w} devient :

$$\text{div}(\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}] \nabla \mathbf{w}) = 0 \quad (\text{B.34})$$

avec la condition aux limites sur $\partial \Omega$:

$$(\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}] \nabla \mathbf{w}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.35})$$

Pour \mathbf{v} solution du problème direct et \mathbf{w} solution du problème adjoint, En calculant $\delta \mathcal{L}$ dans un point $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \delta \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} \cdot \delta \mathbf{w} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \delta \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \delta \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}} \{ \nabla \mathbf{w} : (\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}] \nabla \mathbf{v}) \} : \delta \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} \, dx \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Comme les variations de \mathcal{L} peuvent être calculées explicitement on peut calculer le gradient de \mathcal{I} par rapport à $\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}$. Pour les deux modèles considérés avant on obtient :

– pour l'approche de Mandel, on a le pseudo-tenseur d'élasticité :

$$\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}] \nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{L}^M \boldsymbol{\epsilon}$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour le gradient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \overset{o}{\boldsymbol{\tau}}} : \delta \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} &= - \left[\int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{v} \nabla \mathbf{w} \, dx \right] : \delta \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} \\ &= - \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{w})) \, dx \right] : \delta \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

– pour l'approche de Hoger, on a le pseudo-tenseur d'élasticité :

$$\mathbf{C}[\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}] \nabla \mathbf{v} = \frac{3}{4} \nabla \mathbf{v} \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{4} \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{4} \nabla \mathbf{v}^T \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{4} \overset{o}{\boldsymbol{\tau}} \nabla^T \mathbf{v} + \mathbf{L}^H \boldsymbol{\epsilon}$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour le gradient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}} : \delta \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} &= - \left[\int_{\Omega} \left(\frac{3}{4} \nabla^T \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{w} - \frac{1}{4} \nabla \boldsymbol{w} \nabla^T \boldsymbol{v} - \frac{1}{4} \nabla \boldsymbol{w} \nabla \boldsymbol{v} - \frac{1}{4} \nabla \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{w} \right) dx \right] : \delta \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} \\
&= - \left[\int_{\Omega} 2 (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}) \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{w})) dx \right] : \delta \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{B.38})
\end{aligned}$$

Une approche similaire est possible dans le cas où on part d'une formulation variationnelle du problème correspondante à l'équation d'équilibre pour la contrainte de Cauchy.

B.2 Reconstruction des mesures des contraintes par rayons X

Dans ce paragraphe on s'intéresse à la mesure des contraintes résiduelles par des rayons X. On montre à partir des exemples, que les mesures par rayons X sont nécessairement destructives pour connaître les contraintes à l'intérieur du solide et que l'enlèvement de matière induit une redistribution des contraintes de telle manière que la contrainte mesurée diffère, en général, de la contrainte initiale (paragraphe B.2.2). On généralise la méthode de reconstruction des contraintes initiales (à partir des contraintes mesurées en surface après enlèvement de matière) proposée par Moore et Evans [55], explicite dans ce travail pour une boule (paragraphe B.2.6 dans le cas du massif semi-infini (paragraphe B.2.7) en ensuite pour des corps de géométrie arbitraire (paragraphe B.2.10).

B.2.1 Introduction

La technique de mesure de contraintes résiduelles la plus répandue est la diffraction des rayons X. Cette technique permet la mesure directe du tenseur des contraintes en un point (en fait de la moyenne du tenseur sur un petit volume) de la surface d'un solide polycristallin (voir Maeder & al. [51]). La technique s'applique si certaines conditions matérielles (i.e. grains suffisamment petits, petite déformation plastique, pas de texture) sont satisfaites. Les sources des erreurs expérimentales sont bien maîtrisées. Une présentation complète du sujet se trouve dans Prevey [61]. Du point de vue des applications dans des problèmes d'ingénieur, Maeder a démontré [51], que cette technique est suffisamment précise.

Cette technique ne permet cependant pas la mesure directe du tenseur des contraintes en un point intérieur au solide. En pratique, on retire de la matière de manière à pouvoir accéder au point considéré. Il y a alors redistribution du champ de contrainte et c'est là un problème important de l'analyse des contraintes résiduelles par diffraction de rayons X : comment relier les contraintes mesurées aux contraintes initiales régnant dans le solide avant l'enlèvement de matière ?

L'expression exacte des contraintes initiales en fonction des contraintes mesurées n'a, pour l'instant, été obtenue que dans les cas suivants :

- Barre cylindrique et champ de contrainte à symétrie axiale uniforme le long de la barre (expression intégrale exacte, Moore & Evans [55]).
- Barre cylindrique et champ de contrainte uniforme le long de la barre mais pouvant varier avec θ (expression intégrale approchée ne s'appliquant que pour un champ de contrainte variant 'peu' avec θ , Moore & Evans [59]).
- Cylindre creux et champ de contrainte à symétrie axiale uniforme le long du cylindre (expression intégrale exacte, Moore & Evans [55]).
- Plaque infinie et champ de contrainte ne dépendant que de la position dans l'épaisseur de la plaque (expression intégrale exacte, Moore & Evans [55]).

- Cylindre creux et champ de contrainte à symétrie axiale pouvant varier le long du cylindre (expression exacte sous forme de séries, Nishimura [59]).

Ces études ne concernent que des géométries présentant de fortes symétries et des champs de contraintes unidimensionnels (sauf dans l'article de Nishimura [59] où le champ de contrainte est bidimensionnel).

Autres problèmes similaires (problèmes inverses liées à la mesure des contraintes résiduelles), ont déjà été étudiés. Cheng et Finnie [17] ont reconstruit les contraintes résiduelles dans une plaque à partir des jauges de déformation collées sur une face et en enlèvent des couches de matière de l'autre face. Gao et Mura [27] ont reconstruit numériquement des contraintes résiduelles à l'extérieure de la zone déformée plastiquement à partir des mesures de déplacements en surface, utilisant des formulations intégrales sur la frontière.

B.2.2 Généralités sur le problème - Exemples

Ω est un solide élastique linéaire supportant un champ de contrainte résiduelle σ (champ de contrainte initiale). Ω est rapporté à un système de coordonnées cartésiennes orthonormées. L'enlèvement de matière est supposé être un processus dépendant continument d'un temps fictif t , $t \in [0, T]$, et on appelle Ω_t (de frontière $\partial\Omega_t$) le nouveau solide après enlèvement de matière à l'instant t (voir fig. B.1). Il est évident qu'à chaque \mathbf{x} de $\Omega \setminus \Omega_T$, correspond un unique $t(\mathbf{x})$ tel que \mathbf{x} soit élément de $\partial\Omega_{t(\mathbf{x})}$.

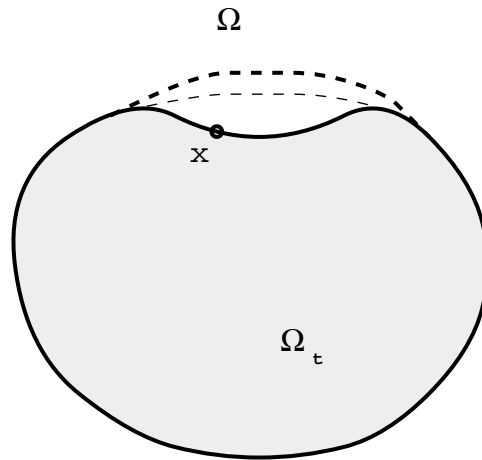


FIG. B.1 – L'enlèvement de matière sur un corps de forme quelconque

On suppose connu le champ de contrainte mesurée σ^m sur chaque surface $\partial\Omega_t$ ($t \in [0, T]$). Le champ σ^m est ainsi défini dans le volume $\Omega \setminus \Omega_T$. De la même manière, \mathbf{n} , le champ des normales aux surfaces $\partial\Omega_t$, est défini dans $\Omega \setminus \Omega_T$.

L'hypothèse fondamentale, est que :

La relaxation des contraintes induites dans Ω_t par l'enlèvement de matière $\Omega \setminus \Omega_t$ est élastique.

Dans les paragraphes suivantes on va répondre, en donnant des exemples simples, aux trois questions suivantes :

- Est-ce qu'il y a une redistribution des contraintes suite à l'enlèvement de matière ?
- Est-ce que les mesures sur une ligne descendant vers l'intérieur du corps sont suffisantes pour remonter à la contrainte initiale sur cette ligne ?
- Est-ce que l'enlèvement de matière est nécessaire ?

B.2.3 Redistribution des contraintes - I

Dans cette partie on présente un exemple où l'enlèvement de matière produit une forte redistribution des contraintes.

Soit Ω un massif semi-infini élastique linéaire isotrope rapporté à un système de coordonnées cartésiennes orthonormées (x, y, z) (z est la 'profondeur' dans le demi-espace). On suppose qu'on se situe en déformations planes et que le massif contient une inclusion plastique dans le sens d'Eshelby ².

L'inclusion est infinie dans la direction y et de section $[-0.5, 0.5] \times [0, 10]$ dans le plan (x, z) (voir fig. B.2). Cette inclusion contient un champ homogène de déformation plastique ϵ^p de la forme :

$$\epsilon^p = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^p \end{pmatrix}$$

L'enlèvement de matière se fait par ablation de plaques infinies d'épaisseur uniforme de sorte que, si l'on prend l'épaisseur h de la couche enlevée comme temps fictif, Ω_h est également un massif semi-infini. On remarque que Ω_h contient encore une inclusion de la même forme que le massif initial.

En conséquence, on peut obtenir le champ des contraintes résiduelles initiales $\sigma(x, z)$, ainsi que le champ des contraintes mesurées $\sigma^m(x, h)$ par les formules intégrales explicites (B.73) - (B.75) de l'annexe.

Dans la figure B.3 on a représenté les composantes $\sigma_{xx}(0, 0, z)$ des contraintes résiduelles ainsi que le champ des mesures $\sigma_{xx}^m(0, 0, z)$. Les trois graphiques correspondent à l'état initial et à deux épaisseurs différentes de couches enlevées. Les courbes continues représentent les contraintes dans le massif à l'instant même, et les courbes en tirets représentent la succession complète de mesures. On remarque que en surface les mesures sont égales aux contraintes à l'instant même, mais que en profondeur elles sont différentes.

²Une inclusion des même modules élastiques que le demi-espace

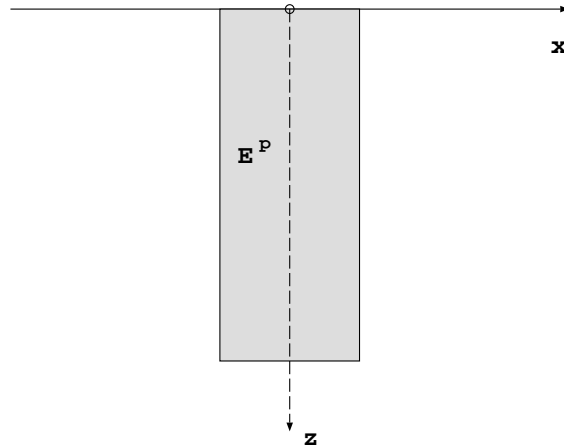


FIG. B.2 – Inclusion plastique rectangulaire dans un demi-espace élastique

Cet exemple montre que l'enlèvement de matière provoque une redistribution des contraintes, qui peut être selon le cas très forte.

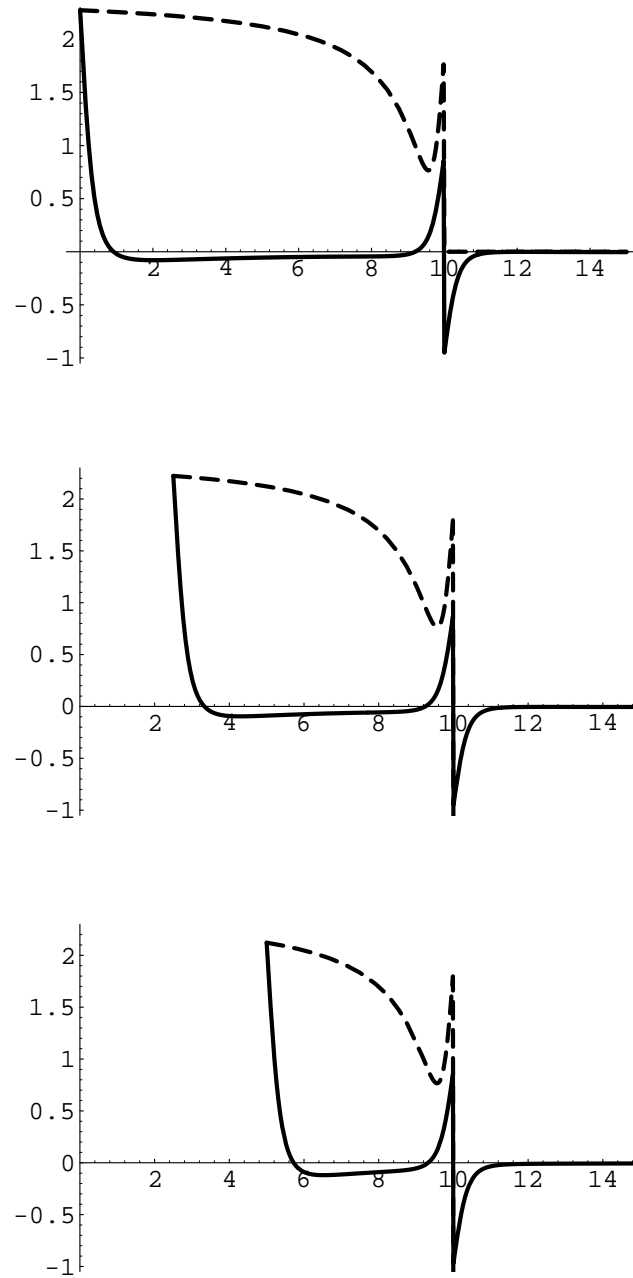


FIG. B.3 – Distributions des contraintes résiduelles selon l'axe z : σ_{xx} (courbe continue), et mesurées σ_{xx}^m (courbe en tirets) pour un demi-espace élastique contenant une inclusion plastique (sans enlèvement (I) et avec enlèvement de matière (II & III))

B.2.4 Redistribution des contraintes - II

Dans la section précédente on vient de montrer que l'enlèvement de matière provoque une forte redistribution des contraintes. On peut penser qu'on est capable de développer une méthode qui permet de calculer les contraintes résiduelles initiales (courbe continue, dans le premier graphique de la figure B.3) seulement à partir des contraintes mesurées sur l'axe z (courbe en tirets, dans le premier graphique de la figure B.3). Un exemple simple va démontrer que cela est impossible.

Soit Ω de nouveau un massif semi-infini élastique linéaire isotrope comme dans l'exemple précédent, mais qui contient cette fois deux inclusions plastiques, de la même forme ayant les sections : $[-5.5, -4.5] \times [0, 10]$ et $[4.5, 5.5] \times [0, 10]$ dans le plan (x, z) (voir fig. B.4).

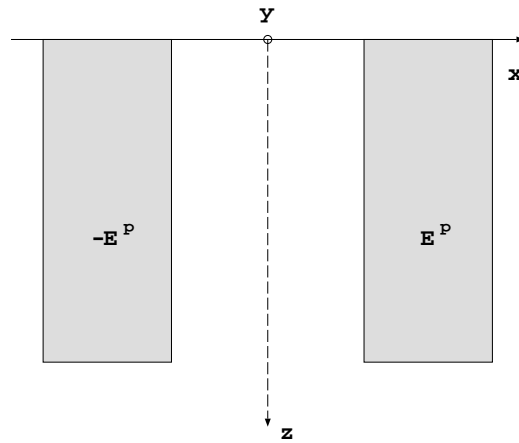


FIG. B.4 – Deux inclusions rectangulaires dans un demi-espace élastique

Les déformations plastiques ϵ_1^p et ϵ_2^p correspondant aux inclusions 1 et 2 ont la forme :

$$\epsilon_1^p = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix} \quad \epsilon_2^p = -\epsilon_1^p$$

Les formules de (B.73) à (B.75) de l'annexe s'appliquent de nouveau, et utilisant le principe de superposition on peut calculer le champ des contraintes résiduelles dans ce cas.

Le tenseur des contraintes est nulle à l'origine des coordonnées, mais σ_{xz} n'est pas nulle sur l'axe des z . En appliquant l'enlèvement de matière exactement comme dans le cas précédent, on remarque que les mesures seront sur l'axe z toujours nulles, tandis que la distribution initiale des contraintes résiduelles ne s'annule pas sur cette axe.

Cet exemple montre que *l'information des mesures sur une ligne de points n'est pas suffisante pour reconstruire la contrainte résiduelle initiale sur cette ligne.*

B.2.5 Redistribution des contraintes - III

Dans les exemples précédentes on a regardé la redistribution des contraintes et l'information, donné par les mesures, sur une lignes des points, lors qu'on enlève de la matière.

La question qu'on se pose maintenant est s'il est vraiment nécessaire d'enlever de la matière. Est-ce qu'on peut pas reconstruire les contraintes résiduelles à l'intérieur du corps seulement à partir de la connaissance du champ de contraintes sur toute la surface du corps. Il est bien connu que la réponse est non. Quand même on va donner une démonstration simple à l'aide d'un exemple simple.

Soit Ω une boule élastique, à frontière libre, de rayon r_0 et ayant les constantes de Lamé λ et μ . On considère un champ des déformation plastiques ϵ^p , ayant dans un système des coordonnées (r, θ, ϕ) l'expression suivante :

$$\epsilon^p(r) = \begin{pmatrix} -2\varepsilon^p(r) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^p(r) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p(r) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon^p(r) = \frac{(r_0 - r)r}{r_0^2} \varepsilon^p \quad (\text{B.39})$$

où ε^p est une constante. On peut vérifier facilement que le champ de déplacements \mathbf{u} , solution du problème, est donné par :

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, \phi) &= \frac{2\mu\varepsilon^p}{\lambda + 2\mu} \frac{(r_0 - r)^2 r}{r_0^2} \\ u_\theta(r, \theta, \phi) &= u_\phi(r, \theta, \phi) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

et que le champ des contraintes résiduelles est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta, \phi) &= \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon^p}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{r_0 - r}{r_0} \right)^2 \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \phi) &= \sigma_{\phi\phi}(r, \theta, \phi) = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon^p}{\lambda + 2\mu} \frac{(r_0 - r)(r_0 - 2r)}{r_0^2} \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, \phi) &= \sigma_{r\phi}(r, \theta, \phi) = \sigma_{\theta\phi}(r, \theta, \phi) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

On remarque facilement que ce champ des contraintes résiduelles s'anulle $\sigma = \mathbf{0}$ sur la surface libre ($r = r_0$), mais il reste non-nul à l'intérieur de la boule. Dans ce cas on a aussi un champ de déplacements nuls en surface.

En conséquence, *une mesure de contraintes résiduelles par la méthodes des rayons X, est nécessairement destructive.*

Autrement dit, le champ des contraintes à la surface d'un solide ne contient pas suffisamment d'information pour reconstruire le champ des contraintes résiduelles à l'intérieur d'un solide.

B.2.6 Reconstruction de la boule

Dans cette partie on va donner une méthode de reconstruction du champ des contraintes résiduelles à l'intérieure d'une sphère à partir des mesures effectués en surfaces après l'enlèvement de couches sphériques de matière.

La méthode transpose celle proposée par Moore et Evans [55] (pour une barre à symétrie cylindrique) dans le cas à symétrie sphérique. Elle est une simple application présentée comme cas d'école pour faciliter la compréhension des cas qui suivent.

On revient à une boule élastique Ω de rayon r_0 contenant champ de contraintes résiduelles. On considère dans la suite un processus continue d'enlèvement des couches sphériques d'épaisseur uniforme, Ω_r désignant la boule de rayon $r, (r \leq r_0)$. Le temps fictif est dans ce cas le rayon de la boule r .

Le processus d'enlèvement des couches fournit, dans le cas du paragraphe précédent, le champ des contraintes mesurées σ suivant :

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^m(r, \theta, \phi) &= \sigma_{\phi\phi}^m(r, \theta, \phi) = -\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon^p}{\lambda + 2\mu} \frac{r(r_0 - r)}{r_0^2} \\ \sigma_{rr}^m(r, \theta, \phi) &= \sigma_{r\theta}^m(r, \theta, \phi) = \sigma_{r\phi}^m(r, \theta, \phi) = \sigma_{\theta\phi}^m(r, \theta, \phi) = 0\end{aligned}\tag{B.42}$$

L'hypothèse fondamentale de ce calcul est que le champ de déformation plastique ne change pas au cours de l'enlèvement de matière.

Supposons maintenant qu'on connaît un champ de contraintes mesurées σ^m de symétrie sphérique, on va montrer dans la suite comment reconstruire le champ des contraintes résiduelles initiales σ (supposé pour la simplicité du raisonnement à symétrie sphérique).

Pour reconstruire σ , on va considérer les 3 problèmes suivantes (voir figure B.5) :

– **Problème 1** (équilibre de contraintes dans Ω) :

Dans la boule de rayon r_0 , à surface libre, le champ de contraintes résiduelles initiales satisfait :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \sigma &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma \mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega\end{aligned}\tag{B.43}$$

ou tenant compte de la symétrie sphérique :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}(r)}{\partial r} = \frac{2}{r} (\sigma_{\theta\theta}(r) - \sigma_{rr}(r)) \quad \text{et} \quad \sigma_{rr}(r_0) = 0\tag{B.44}$$

– **Problème 2** (équilibre de contraintes dans $\Omega_{r'}$) :

Dans la boule de rayon r' , à surface libre, on a un champ de contraintes résiduelles σ' . A la surface libre, $\partial\Omega_{r'}$, le champ de contraintes est égal au champ des contraintes mesurées $\sigma'(r') = \sigma(r')$.

– **Problème 3** (problème élastique auxiliaire sur $\Omega_{r'}$) :

La boule élastique de rayon r' chargé par $\sigma(r')\mathbf{n}$ à la surface $\partial\Omega_{r'}$. Le champ des contraintes, solution de cette problème, va être noté par : σ^{aux} .

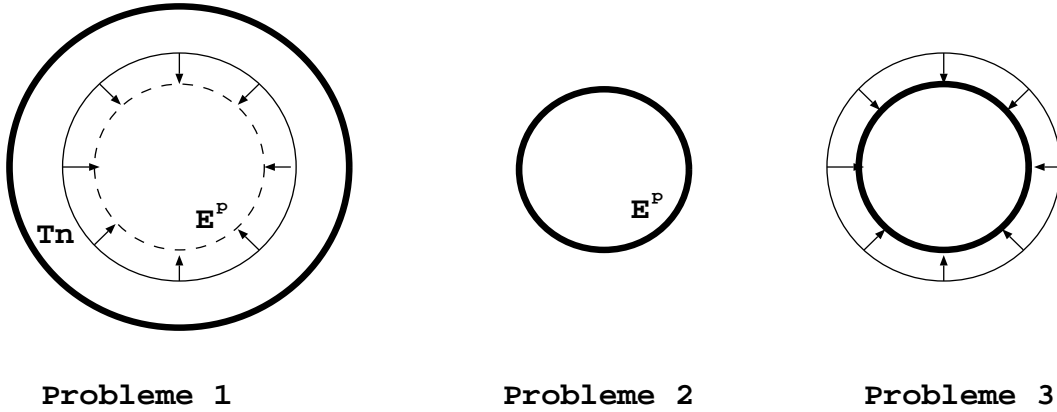


FIG. B.5 – Description des trois problèmes dans le cas de la boule

Le problème 3 est un problème purement élastique, alors que les problèmes 1 et 2 font intervenir le champ de déformation inélastique (supposé identique dans les deux cas du fait de l'hypothèse de relaxation élastique) à l'origine du champ de contraintes résiduelles. Par application du principe de superposition, on a, sur \mathbf{r}' :

$$\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{r}') = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}') - \boldsymbol{\sigma}^m(\mathbf{r}') \quad (\text{B.45})$$

On constate que la solution du problème auxiliaire sur chaque surface $\partial\Omega_{r'}$ fournit une relation entre le champ de contraintes mesurées $\boldsymbol{\sigma}^m$ et le champ de contraintes initiales $\boldsymbol{\sigma}$.

Le problème auxiliaire est élastique et a une solution immédiate. La contrainte dans une sphère produite par un champ de pression, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}')\mathbf{n} = \sigma_{rr}(\mathbf{r}')$, est hydrostatique, et alors on a :

$$\boldsymbol{\sigma}^{aux} = \sigma_{rr}(\mathbf{r}')\mathbf{I} \quad (\text{B.46})$$

Compte tenu des remarques précédentes on a :

$$\sigma_{\theta\theta}(\mathbf{r}') = \sigma_{\theta\theta}^m(\mathbf{r}') + \sigma_{rr}(\mathbf{r}') \quad (\text{B.47})$$

Les équations (B.44) et (B.47) conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}(r)}{\partial r} = \frac{2}{r}(\sigma_{\theta\theta}(r) - \sigma_{rr}(r)) & (\text{équation d'équilibre}) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\theta\theta}^m(r) + \sigma_{rr}(r) & (\text{équation auxiliaire}) \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

Si $\boldsymbol{\sigma}^m$ est donnée c'est facile à vérifier que le système (B.48) avec la condition au limite $\sigma_{rr}(r_0) = 0$ détermine d'une manière unique $\boldsymbol{\sigma}$. La solution est donnée par les

formules :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= \int_{r_0}^r \frac{2\sigma_{\theta\theta}^m(r')}{r'} dr' \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= \sigma_{\theta\theta}^m(r) + \int_{r_0}^r \frac{2\sigma_{\theta\theta}^m(r')}{r'} dr'\end{aligned}\tag{B.49}$$

C'est facile à vérifier que dans le cas de l'exemple du paragraphe précédent les contraintes mesurées (B.42) conduisent, par intégration, utilisant (B.49), aux contraintes résiduelles initiales (B.49).

Dans cet exemple on a procédé exactement comme Moore et Evans, l'avantage essentiel étant le problème unidimensionnel. Même si ce problème est d'un faible intérêt pratique, il permet de mettre en évidence les points clefs de la reconstruction : la superposition des problèmes et la solution explicite du problème auxiliaire. La difficulté dans le cas général est la solution du problème auxiliaire.

B.2.7 Reconstruction dans le cas du demi-espace

Dans cette partie, Ω est un massif semi-infini élastique linéaire isotrope rapporté à un système de coordonnées cartésiennes orthonormées (x, y, z) (z est la 'profondeur' dans le demi-espace). L'enlèvement de matière se fait par ablation de plaques infinies d'épaisseur uniforme de sorte que, si l'on prend l'épaisseur h de la couche enlevée comme temps fictif régissant l'enlèvement continu de matière, Ω_h est également un massif semi-infini.

On suppose connu le champ de contrainte mesurée σ^m sur chaque surface $\partial\Omega_h$. A un instant h fixé, le champ σ^m est ainsi défini dans le volume $\Omega \setminus \Omega_h$.

L'hypothèse fondamentale, est que *la relaxation des contraintes dans Ω_h due à l'enlèvement de matière $\Omega \setminus \Omega_h$ est élastique.*

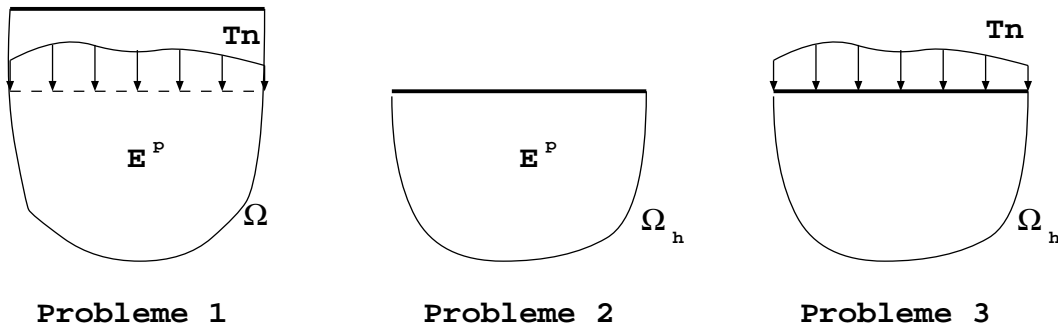


FIG. B.6 – Les trois problèmes dans le cas du demi-espace

On considère alors, à l'instant h , les trois problèmes suivants :

– **Problème 1** (équilibre des contraintes dans Ω) :

Le champ de contrainte est σ .

- **Problème 2** (équilibre des contraintes dans Ω_h) :
Le champ de contrainte sur la surface $\partial\Omega_h$ est $\boldsymbol{\sigma}^m(\mathbf{x})$ (pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega_h$).
- **Problème 3** (problème *élastique* auxiliaire dans Ω_h) :
On considère un solide élastique de géométrie Ω_h sur la frontière duquel on applique les tractions $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \partial\Omega_h$). On désigne par $\boldsymbol{\sigma}^h$ le champ de contrainte qui en résulte dans Ω_h .

Le problème 3 est un problème purement élastique, alors que les problèmes 1 et 2 font intervenir le champ de déformation inélastique (supposé identique dans les deux cas du fait de l'hypothèse de relaxation élastique) à l'origine du champ de contraintes résiduelles. Par application du principe de superposition, on a, pour \mathbf{x} sur $\partial\Omega_h$:

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}^m(\mathbf{x}) \quad (\text{B.50})$$

On constate que la solution du problème auxiliaire sur chaque surface $\partial\Omega_h$ fournit une relation entre le champ de contraintes mesurées $\boldsymbol{\sigma}^m$ et le champ de contraintes initiales $\boldsymbol{\sigma}$. Pour résoudre le problème auxiliaire, on utilise la solution du problème de Boussinesq-Cerruti (voir par exemple Johnson [36]).

B.2.8 Problème bidimensionnel

Nous allons présenter dans la suite la solution pour le problème bidimensionnel ($\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}^m$ ne dépendent que de x et z).

Le champ de contrainte à la surface d'un massif semi-infini soumis à des forces de surface de la forme $\mathbf{f}(x, z) = f_x\delta(x)\delta(z)\mathbf{e}_x + f_y\delta(x)\delta(z)\mathbf{e}_y + f_z\delta(x)\delta(z)\mathbf{e}_z$ (où $\delta(\cdot)$ est la distribution de Dirac), est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, 0) &= -\frac{2f_x}{\pi} \text{V.p.} \left(\frac{1}{x} \right) - f_z\delta(x) \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= -\frac{f_y}{\pi} \text{V.p.} \left(\frac{1}{x} \right) \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= -\frac{2\nu f_x}{\pi} \text{V.p.} \left(\frac{1}{x} \right) - 2\nu f_z\delta(x) \\ \sigma_{xz}(x, 0) &= -f_x\delta(x) \\ \sigma_{yz}(x, 0) &= -f_y\delta(x) \\ \sigma_{zz}(x, 0) &= -f_z\delta(x) \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

où $\text{V.p.} \left(\frac{1}{x} \right)$ est la distribution : Valeur Principale de $\frac{1}{x}$. L'équation d'équilibre satis-

faite par σ ainsi que l'équation (B.50) conduisent alors au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \\ \sigma_{xx}(x, z) = \sigma_{xx}^m(x, z) + \frac{2}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{xz}(x', z)}{x - x'} dx' + \sigma_{zz}(x, z) \\ \sigma_{xy}(x, z) = \sigma_{xy}^m(x, z) + \frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{yz}(x', z)}{x - x'} dx' \\ \sigma_{yy}(x, z) = \sigma_{yy}^m(x, z) + \frac{2\nu}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{xz}(x', z)}{x - x'} dx' + 2\nu \sigma_{zz}(x, z) \end{array} \right. \quad (\text{B.52})$$

avec les conditions aux limites :

$$\sigma_{xz}(x, 0) = 0 \quad \sigma_{yz}(x, 0) = 0 \quad \sigma_{zz}(x, 0) = 0 \quad (\text{B.53})$$

Le système (B.52) peut être résolu par utilisation de la transformation de Fourier au sens des distributions (voir Schwartz [65]). La solution en est :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, z) &= \sigma_{xx}^m(x, z) + \\ &\quad \frac{2}{\pi} \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - x')^4 - 3(x - x')^2(z - z')^2}{[(x - x')^2 + (z - z')^2]^3} [\sigma_{xx}^m(x', z') - \sigma_{xx}^m(x, z')] dx' dz' \\ \sigma_{xy}(x, z) &= \sigma_{xy}^m(x, z) + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - x')^2 - (z - z')^2}{[(x - x')^2 + (z - z')^2]^2} [\sigma_{xy}^m(x', z') - \sigma_{xy}^m(x, z')] dx' dz' \\ \sigma_{yy}(x, z) &= \sigma_{yy}^m(x, z) + \\ &\quad \frac{2\nu}{\pi} \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - x')^2 - (z - z')^2}{[(x - x')^2 + (z - z')^2]^2} [\sigma_{xx}^m(x', z') - \sigma_{xx}^m(x, z')] dx' dz' \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}(x, z) &= \\
 &\frac{4}{\pi} \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x')^3(z-z') - (x-x')(z-z')^3}{[(x-x')^2 + (z-z')^2]^3} [\sigma_{xx}^m(x', z') - \sigma_{xx}^m(x, z')] dx' dz' \\
 \sigma_{yz}(x, z) &= \\
 &\frac{2}{\pi} \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x')(z-z')}{[(x-x')^2 + (z-z')^2]^2} [\sigma_{xy}^m(x', z') - \sigma_{xy}^m(x, z')] dx' dz' \\
 \sigma_{zz}(x, z) &= \\
 &\frac{2}{\pi} \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3(x-x')^2(z-z')^2 - (z-z')^4}{[(x-x')^2 + (z-z')^2]^3} [\sigma_{xx}^m(x', z') - \sigma_{xx}^m(x, z')] dx' dz'
 \end{aligned} \tag{B.55}$$

où ν est le coefficient de Poisson. Toutes les intégrales qui figurent dans ce résultat sont des intégrales impropres ordinaires. Il est clair que les équations (B.55) permettent de calculer σ à partir de σ^m .

Ce résultat a été vérifié numériquement à l'aide des champs des contraintes résiduelles correspondantes à l'inclusion plastique rectangulaire dans une demi-espace élastique, pour lesquelles on a des formules explicites (voir paragraphe B.2.2). A partir du champ de contraintes mesurées on a calculé les valeurs de la contrainte résiduelle initiale utilisant les formules précédentes, et ensuite on a comparé les valeurs obtenues numériquement avec la solution exacte.

On remarque que le calcul a tenu compte de *toutes les mesures* sur chaque surface enlevé et non seulement des valeurs mesurées selon l'axe z .

La justesse du calcul est démontrée par une bonne correspondance des valeurs mais surtout par la capacité de la méthode de reconstruire la singularité épine apparaissant à la frontière de l'inclusion plastique.

B.2.9 Le problème tridimensionnel

Dans ce paragraphe le champ des contraintes résiduelles mesurées, $\sigma^m(x, y, z)$, est un champ tridimensionnel arbitraire. Pour procéder comme précédemment, il nous faut la solution du problème auxiliaire. Le champ de contrainte à la surface d'un massif semi-infini soumis à des forces de surface concentrées peut être déduit à partir des expressions générales des solutions fondamentales du demi-espace (voir Mindlin [54]) après un passage à la limite pris au sens des distributions. Les compo-

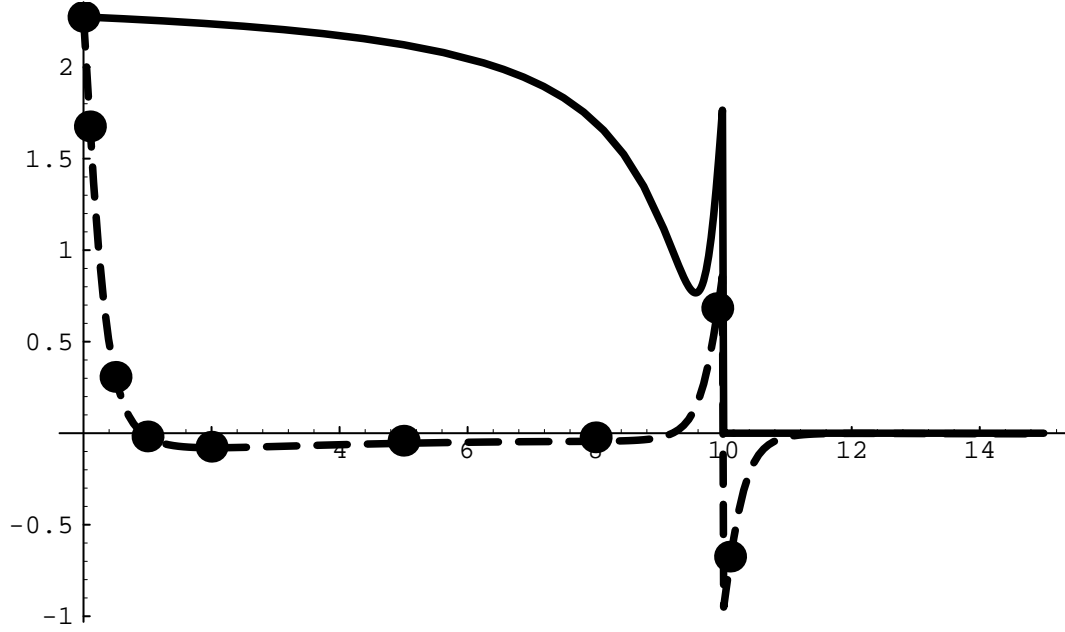


FIG. B.7 – Comparaison des contraintes résiduelles calculées (points) avec celles initiales (courbe en tirets) et celles mesurées (courbe continue) selon l'axe z

santes de la contrainte sont :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x, y, 0) &= -\frac{f_x}{\pi} \left[(1 - 2\nu) \text{P.v.} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) + 3\nu \text{P.v.} \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^5} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{f_y}{\pi} \left[3\nu \text{P.v.} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}^5} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{f_z}{2\pi} \left[(1 - 2\nu) \text{P.v.} \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] - \frac{1 + 2\nu}{2} f_z \delta(x) \delta(y) \\
 \sigma_{yy}(x, y, 0) &= -\frac{f_x}{\pi} \left[3\nu \text{P.v.} \left(\frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^5} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{f_y}{\pi} \left[(1 - 2\nu) \text{P.v.} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) + 3\nu \text{P.v.} \left(\frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^5} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{f_z}{2\pi} \left[(1 - 2\nu) \text{P.v.} \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] - \frac{1 + 2\nu}{2} f_z \delta(x) \delta(y) \\
 \sigma_{zz}(x, y, 0) &= -f_z \delta(x) \delta(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}(x, y, 0) &= -\frac{f_x}{2\pi} \left[(1-2\nu) \text{P.v.} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \right) + 6\nu \text{P.v.} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}^5} \right) \right] \\
 &\quad -\frac{f_y}{2\pi} \left[(1-2\nu) \text{P.v.} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \right) + 6\nu \text{P.v.} \left(\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}^5} \right) \right] \\
 &\quad +\frac{f_z}{\pi} \left[(1-2\nu) \text{P.v.} \left(\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \right) \right] \\
 \sigma_{xz}(x, y, 0) &= -f_x \delta(x) \delta(y) \\
 \sigma_{yz}(x, y, 0) &= -f_y \delta(x) \delta(y)
 \end{aligned} \tag{B.56}$$

De nouveau on peut déduire   partir d'ici un système d'équations pour la contrainte résiduelle initiale σ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x, y, z) &= \sigma_{xx}^m(x, y, z) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^3} \right. \\
 &\quad \left. + 3\nu \frac{(x-x')^3}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^5} \right] \sigma_{xz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &+ \frac{1}{\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[3\nu \frac{(x-x')^2 (y-y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^5} \right] \sigma_{yz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &- \frac{1}{2\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{(x-x')^2 - (y-y')^2}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^2} \right] \sigma_{zz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &+ \frac{1+2\nu}{2} \sigma_{zz}(x, y, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}(x, y, z) &= \sigma_{yy}^m(x, y, z) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[3\nu \frac{(x-x')(y-y')^2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^5} \right] \sigma_{xz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &+ \frac{1}{\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^3} \right. \\
 &\quad \left. + 3\nu \frac{(y-y')^3}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^5} \right] \sigma_{yz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &- \frac{1}{2\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{(y-y')^2 - (x-x')^2}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^2} \right] \sigma_{zz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &+ \frac{1+2\nu}{2} \sigma_{zz}(x, y, z) \\
 \\
 \sigma_{xy}(x, y, z) &= \sigma_{xy}^m(x, y, z) \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^3} \right. \\
 &\quad \left. + 6\nu \frac{(x-x')^2(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^5} \right] \sigma_{xz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^3} \right. \\
 &\quad \left. + 6\nu \frac{(x-x')(y-y')^2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}^5} \right] \sigma_{yz}(x', y', z) dx' dy' \\
 &- \frac{1}{\pi} \text{P.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{(x-x')(y-y')}{((x-x')^2 + (y-y')^2)^2} \right] \sigma_{zz}(x', y', z) dx' dy'
 \end{aligned} \tag{B.57}$$

avec les conditions aux limites :

$$\sigma_{xz}(x, 0) = \sigma_{xz}(x, 0) = \sigma_{zz}(x, 0) = 0 \tag{B.58}$$

La solution du système (B.57) peut être obtenue utilisant la même technique que dans le problème bidimensionnel B.2.8. Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x, y, z) &= \sigma_{xx}^m(x, y, z) \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{R^3} - \frac{3}{R(R+z-z')^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{15(x-x')^4}{R^7} - \frac{12(x-x')^2}{R^5} + \frac{6(x-x')^2}{R^3(R+z-z')^2} + \frac{12(x-x')^2}{R^2(R+z-z')^3} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left((x-x')^4 + 2\nu(x-x')^2(y-y')^2 \right) \right\} dz'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{3}{R^5(R+z-z')^2} + \frac{6}{R^4(R+z-z')^3} + \frac{6}{R^3(R+z-z')^4} \right] \Big\} \\
 & [\sigma_{xx}^m(x', y', z') - \sigma_{xx}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left\{ (1+2\nu) \left[\frac{3(x-x')(y-y')}{R^3(R+z-z')^2} + \frac{6(x-x')(y-y')}{R^2(R+z-z')^3} \right] \right. \\
 & \quad + \left[\frac{15(x-x')^3(y-y')}{R^7} - \frac{6(x-x')(y-y')}{R^5} \right] \\
 & \quad - \left((x-x')^3(y-y') + 2\nu(x-x')(y-y')^3 \right) \\
 & \quad \left. \left[\frac{3}{R^5(R+z-z')^2} + \frac{6}{R^4(R+z-z')^3} + \frac{6}{R^3(R+z-z')^4} \right] \right\} \\
 & [\sigma_{xy}^m(x', y', z') - \sigma_{xy}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{3}{R(R+z-z')^2} \right] \right. \\
 & \quad + \left[\frac{15(x-x')^2(y-y')^2}{R^7} + \frac{3(z-z')^2}{R^5} - \frac{3}{R^3} \right] \\
 & \quad - \left((x-x')^2(y-y')^2 + 2\nu(y-y')^4 \right) \\
 & \quad \left. \left[\frac{3}{R^5(R+z-z')^2} + \frac{6}{R^4(R+z-z')^3} + \frac{6}{R^3(R+z-z')^4} \right] \right. \\
 & \quad \left. + 2\nu \left[\frac{6(y-y')^2}{R^3(R+z-z')^2} + \frac{12(y-y')^2}{R^2(R+z-z')^3} \right] \right\} \\
 & [\sigma_{yy}^m(x', y', z') - \sigma_{yy}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \tag{B.59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}(x, y, z) &= \sigma_{xy}^m(x, y, z) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left\{ \left[\frac{1}{R^3} - \frac{3(z-z')^2}{R^5} \right] \right. \\
 & \quad + 4\nu \left[\frac{3(x-x')^2(y-y')^2}{R^5(R+z-z')^2} + \frac{6(x-x')^2(y-y')^2}{R^4(R+z-z')^3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{6(x-x')^2(y-y')^2}{R^3(R+z-z')^4} + \frac{1}{R^3} - \frac{3}{R(R+z-z')^2} \right] \Big\} \\
 & [\sigma_{xy}^m(x', y', z') - \sigma_{xy}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left\{ \left[\frac{3(x-x')(y-y')}{R^5} \right] \right. \\
 & \quad \left. - 2\nu \left[\frac{3(x-x')(y-y')}{R^3(R+z-z')^2} + \frac{6(x-x')(y-y')}{R^2(R+z-z')^3} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [(\sigma_{xx}^m(x', y', z') - \sigma_{xx}^m(x, y, z')) \\
 & + (\sigma_{yy}^m(x', y', z') - \sigma_{yy}^m(x, y, z'))] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z 2\nu \left[\frac{3(x-x')(y-y')}{R^5(R+z-z')^2} + \frac{6(x-x')(y-y')}{R^4(R+z-z')^3} \right. \\
 & \left. + \frac{6(x-x')(y-y')}{R^3(R+z-z')^4} \right] \\
 & [(x-x')^2 (\sigma_{xx}^m(x', y', z') - \sigma_{xx}^m(x, y, z')) \\
 & + (y-y')^2 (\sigma_{yy}^m(x', y', z') - \sigma_{yy}^m(x, y, z'))] dx' dy' dz'
 \end{aligned} \tag{B.60}$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z) \text{ avec } x \text{ et } y \text{ interchangegés.} \tag{B.61}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}(x, y, z) = & \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left[\frac{15(x-x')^3(z-z')}{R^7} - \frac{6(x-x')(z-z')}{R^5} \right] \\
 & [\sigma_{xx}^m(x', y', z') - \sigma_{xx}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left[\frac{30(x-x')^2(y-y')(z-z')}{R^7} - \frac{3(y-y')(z-z')}{R^5} \right] \\
 & [\sigma_{xy}^m(x', y', z') - \sigma_{xy}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left[\frac{15(x-x')(y-y')^2(z-z')}{R^7} - \frac{3(x-x')(z-z')}{R^5} \right] \\
 & [\sigma_{yy}^m(x', y', z') - \sigma_{yy}^m(x, y, z')] dx' dy' dz'
 \end{aligned} \tag{B.62}$$

$$\sigma_{yz}(x, y, z) = \sigma_{xz}(x, y, z) \text{ avec } x \text{ et } y \text{ interchangegés} \tag{B.63}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}(x, y, z) = & \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left[\frac{15(x-x')^2(z-z')^2}{R^7} - \frac{3(z-z')^2}{R^5} \right] \\
 & [\sigma_{xx}^m(x', y', z') - \sigma_{xx}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left[\frac{15(x-x')(y-y')(z-z')^2}{R^7} \right] \\
 & [\sigma_{xy}^m(x', y', z') - \sigma_{xy}^m(x, y, z')] dx' dy' dz' \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^z \left[\frac{15(y-y')^2(z-z')^2}{R^7} - \frac{3(z-z')^2}{R^5} \right]
 \end{aligned}$$

$$\left[\sigma_{yy}^m(x', y', z') - \sigma_{yy}^m(x, y, z') \right] dx' dy' dz' \quad (\text{B.64})$$

où :

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Les formules (B.59)-(B.64) sont des formules d'inversion explicites dans le cas de la géométrie du demi-espace, toutes les intégrales qui figurent dans ce résultat sont des intégrales impropres ordinaires.

A partir de ces formules on peut tirer les conclusions suivantes :

- Pour la reconstruction du champ des contraintes résiduelles initiales σ , il est nécessaire de connaître *le champ complet des mesures σ^m sur chaque surface intermédiaire*. Ceci représente une grande quantité de mesures mais elle ressort de la nature mathématique du problème lui-même.
- Si les contraintes mesurées σ^m sont indépendantes des coordonnées y , alors nécessairement (cf. (B.59)-(B.64)) le champ de contrainte résiduelle initiale ne dépend de y non plus. L'hypothèse initiale du problème bidimensionnel (paragraphe B.2.8), a été ainsi prouvée a posteriori.
- Si les contraintes mesurées σ^m sont indépendantes des coordonnées spatiales x et y , l'enlèvement de matière n'induit pas de redistribution des contraintes.

B.2.10 Géométrie arbitraire

On revient dans ce qui suit à un corps Ω , de géométrie arbitraire, tel qu'il était présenté dans le paragraphe B.2.2.

On rappelle l'hypothèse fondamentale :

La relaxation des contraintes induites dans Ω_t par l'enlèvement de matière $\Omega \setminus \Omega_t$ est élastique.

Dans ce cas on ne fait aucune hypothèse sur la géométrie des couches enlevées.

Comme dans les cas précédents on considère à l'instant t les trois problèmes élastiques suivants :

- **Problème 1** : équilibre des contraintes dans Ω . Le champ de contrainte est σ .
- **Problème 2** : équilibre des contraintes dans Ω_t . Le champ de contrainte sur la surface $\partial\Omega_t$ est $\sigma^m(x)$ (pour $x \in \partial\Omega_t$).
- **Problème 3** : problème *élastique* auxiliaire . On considère un solide élastique de géométrie Ω_t sur la frontière duquel on applique les tractions $\sigma(x).n(x)$ ($x \in \partial\Omega_t$).

On désigne par σ^t le champ de contrainte et par u^t le champ des déplacements qui en résultent dans Ω_t .

Par application du principe de superposition, on a, pour x sur $\partial\Omega_t$:

$$\sigma^t(x) = \sigma(x) - \sigma^m(x) \quad (\text{B.65})$$

On constate que la solution du problème auxiliaire sur chaque surface $\partial\Omega_t$ fournit une relation entre le champ de contrainte mesurée σ^m et le champ de contrainte initiale σ .

Dans les cas à géométrie simple (i.e. sphère et demi-espace), on a eu des solutions explicites pour le problème auxiliaire. C'est n'est pas le cas pour une géométrie arbitraire. Pour résoudre le problème auxiliaire, nous allons utiliser la théorie des équations intégrales de surface, d'autres méthodes conduisant à des solutions numériques étant aussi envisageables. On introduit la solution fondamentale de Kelvin (voir, par exemple, Kupradze [46]) et ses dérivées :

$$\begin{aligned} G_{ij}^0(\mathbf{x}) &= \frac{3-4\nu}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{x_i x_j}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3} \\ G_{ijk}^1(\mathbf{x}) &= \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial G_{mk}^0}{\partial x_m} \right) + \mu \left(\frac{\partial G_{ik}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jk}^0}{\partial x_i} \right) \\ G_{ijkl}^2(\mathbf{x}) &= \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial G_{klm}^1}{\partial x_m} \right) + \mu \left(\frac{\partial G_{kli}^1}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{klj}^1}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

où l'on utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Le champ de déplacement \mathbf{u}^t , solution du problème auxiliaire, satisfait (cf par exemple Kupradze [46]) l'équation intégrale singulière de surface :

$$\frac{1}{2}u_i^t(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_t}^* \left[G_{ki}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y})\sigma_{kl}(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) - G_{kli}^1(\mathbf{x}-\mathbf{y})u_k^t(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) \right] dS(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_t \quad (\text{B.67})$$

où l'astérisque rappelle que l'intégrale ne converge qu'au sens des valeurs principales de Cauchy. Dans l'équation (B.67), σ_{ij} désignent, bien sûr, les composantes du tenseur des contraintes initiales σ . On peut donner une expression intégrale de la contrainte de surface pour le problème auxiliaire. En tenant compte de l'équation (B.65), il vient pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega_t$:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^m(\mathbf{x})) = \int_{\partial\Omega_t}^* \left[G_{ijk}^1(\mathbf{x}-\mathbf{y})\sigma_{kl}(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) - G_{ijkl}^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})u_k^t(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) \right] dS(\mathbf{y}) \quad (\text{B.68})$$

Les équations (B.67) et (B.68) étant valables pour tout t élément de $[0, T]$, en leur adjoignant l'équation d'équilibre de σ ($\text{div}\sigma = 0$), on obtient le système intégral-différentiel linéaire sur $\Omega \setminus \Omega_T$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} &= 0 \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}^m(\mathbf{x}) + 2 \int_{\partial\Omega_t(\mathbf{x})}^* \left[G_{ijk}^1(\mathbf{x}-\mathbf{y})\sigma_{kl}(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) - G_{ijkl}^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})u_k^t(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) \right] dS(\mathbf{y}) \\ u_i^t(\mathbf{x}) &= 2 \int_{\partial\Omega_t(\mathbf{x})}^* \left[G_{ki}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y})\sigma_{kl}(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) - G_{kli}^1(\mathbf{x}-\mathbf{y})u_k^t(\mathbf{y})n_l(\mathbf{y}) \right] dS(\mathbf{y}) \end{aligned} \right. \quad (\text{B.69})$$

avec les conditions aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{B.70})$$

Le système (B.69) représente en effet une équation d'évolution pour la contrainte résiduelle initiale, le paramètre de l'évolution étant le temps fictif. Ainsi, *le champ de contrainte résiduelle initiale dans le volume balayé par l'enlèvement de matière est déterminé par les mesures des contraintes en surface sur chaque surface intermédiaire.*

B.2.11 Brève description d'un algorithme de résolution numérique

On décrit ici un algorithme permettant de calculer numériquement le champ σ à partir de σ^m .

Soit $(\mathbf{r}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}))$ un triplet de vecteurs orthonormés où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est toujours la normale sortante sur $\partial\Omega_t$ et $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ deux vecteurs tangents. $\mathbf{r}(\mathbf{x})$, $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ sont supposés être des fonctions différentiables de \mathbf{x} . On définit sur $\partial\Omega_t$:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x})\mathbf{s}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

On discrétise d'abord l'enlèvement de matière en N étapes, définissant ainsi N surfaces intermédiaires $\partial\Omega_i$ ($\partial\Omega_0 = \partial\Omega$).

Supposons maintenant que σ ait été calculé sur $\partial\Omega_{i-1}$. Nous allons décrire une méthode numérique permettant de calculer σ sur $\partial\Omega_i$.

La première équation du système (B.69) (équation de la divergence) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{s}} + \sigma(\nabla \mathbf{n})\mathbf{n} + \sigma(\nabla \mathbf{r})\mathbf{r} + \sigma(\nabla \mathbf{s})\mathbf{s} \quad (\text{B.72})$$

Le terme de droite de l'équation (B.72) ne fait intervenir que des dérivées géométriques et des dérivées de σ le long de $\partial\Omega_{i-1}$. L'équation (B.72) permet donc d'évaluer $\mathbf{N} = \sigma \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega_i$. Lorsque $\sigma \mathbf{n}$ est déterminé sur $\partial\Omega_i$, une méthode classique d'éléments de frontière (voir, par exemple, Banerjee et Butterfield [6]) permet de résoudre numériquement la troisième équation du système (B.69). La seconde équation du système (B.69), après une classique régularisation (voir, par exemple, Bui et al. [15]), permet d'achever le calcul du tenseur des contraintes σ sur la nouvelle surface $\partial\Omega_i$.

Cet algorithme permet donc le calcul de σ sur $\partial\Omega_i$ à partir de σ sur $\partial\Omega_{i-1}$ et de σ^m sur $\partial\Omega_i$. Il est immédiat de vérifier qu'il est correctement initialisé par les conditions aux limites (B.70).

Aucune étude sur la stabilité de cet algorithme n'a encore été menée.

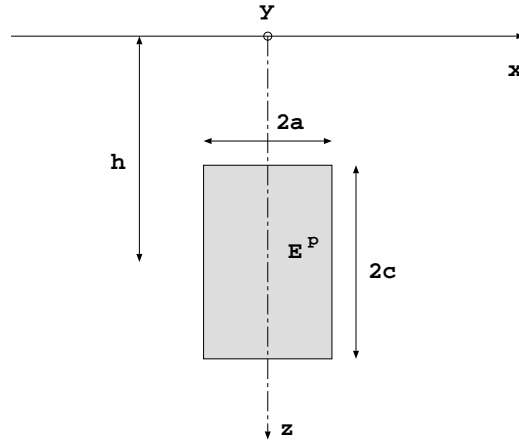


FIG. B.8 – L'inclusion plastique dans le demi-espace.

B.2.12 Conclusion

Le but de ce travail était l'étude de l'inversion d'un champ de contraintes résiduelles à partir de mesures de contraintes en surface après enlèvement de matière. On a formalisé le problème sur le plan mathématique, ce qui a permis d'obtenir des formules d'inversion explicites pour le demi-espace. Ces formules montrent que la reconstruction du champ de contraintes initiales nécessite la mesure du champ de contraintes sur toute surface intermédiaire du processus d'enlèvement de matière.

Il est évident que dans le cas d'un solide de forme arbitraire, la décomposition en trois problèmes peut être reproduite. La différence essentielle avec la géométrie semi-infinie est l'absence de solution explicite dans le cas général au problème auxiliaire. Néanmoins, on dispose d'une solution formelle du problème auxiliaire à l'aide de fonctions de Green. L'utilisation d'une telle solution formelle permet de montrer que $\sigma \mathbf{n}$ (où σ désigne toujours le champ de contraintes initiales et \mathbf{n} la normale à une surface intermédiaire) satisfait une équation d'évolution linéaire du premier ordre en la variable t (temps fictif régissant l'enlèvement continu de matière). La donnée initiale est alors clairement donnée par les conditions aux limites sur le solide avant enlèvement de matière ($\sigma \mathbf{n} = 0$). L'analyse de cette équation d'évolution nous a permis d'indiquer les bases d'un algorithme permettant la résolution numérique du problème dans le cas d'un solide de géométrie arbitraire.

B.2.13 Inclusion plastique dans un demi-espace

Dans cette annexe on présenté les expressions intégrales explicites des contraintes créées par une inclusion plastique (au sens d'Eshelby) dans un demi-espace élastique. Le demi-espace est considéré comme élastique linéaire et isotrope et dans un état de

déformation plane.

La géométrie du problème ainsi que les notations sont présentées dans la figure B.8.

Dans l'inclusion plastique on considère un champ de déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ de la forme suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(x, z) = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix} \chi(x, z)$$

où $\chi(x, z)$ est la fonction caractéristique de l'inclusion (elle s'annule à l'extérieur de l'inclusion et est 1 à l'intérieur).

La fonction de Green du demi-espace (Mindlin [54]) a été intégrée suivant y de $-\infty$ à $+\infty$ pour obtenir une fonction bidimensionnelle de Green. Le champ de contraintes dans le demi-espace est ensuite facilement calculé (voir Mura [56]) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, z) = & \mu \varepsilon^p \chi(x, z) \\ & + \frac{\mu \varepsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \left[4\nu \left(\arctan \left(\frac{x-a}{z-h-c} \right) - \arctan \left(\frac{x+a}{z-h-c} \right) - \arctan \left(\frac{x-a}{z-h+c} \right) \right. \right. \\ & + \arctan \left(\frac{x+a}{z-h+c} \right) \Big) - 2(1-\nu) \left(\arctan \left(\frac{z-h-c}{x-a} \right) - \arctan \left(\frac{z-h-c}{x+a} \right) \right. \\ & - \arctan \left(\frac{z-h+c}{x-a} \right) + \arctan \left(\frac{z-h+c}{x+a} \right) \Big) + 4\nu(3-4\nu) \left(\arctan \left(\frac{x-a}{z+h+c} \right) \right. \\ & - \arctan \left(\frac{x+a}{z+h+c} \right) - \arctan \left(\frac{x-a}{z+h-c} \right) + \arctan \left(\frac{x+a}{z+h-c} \right) \Big) \\ & - 2(3-9\nu+8\nu^2) \left(\arctan \left(\frac{z+h+c}{x-a} \right) - \arctan \left(\frac{z+h+c}{x+a} \right) - \arctan \left(\frac{z+h-c}{x-a} \right) \right. \\ & + \arctan \left(\frac{z+h-c}{x+a} \right) \Big) - 3 \left(\frac{(x-a)(z-h-c)}{(x-a)^2 + (z-h-c)^2} - \frac{(x+a)(z-h-c)}{(x+a)^2 + (z-h-c)^2} \right. \\ & - \frac{(x-a)(z-h+c)}{(x-a)^2 + (z-h+c)^2} + \frac{(x+a)(z-h+c)}{(x+a)^2 + (z-h+c)^2} \Big) \\ & - (5-4\nu) \left(\frac{(x-a)z}{(x-a)^2 + (z+h+c)^2} - \frac{(x+a)z}{(x+a)^2 + (z+h+c)^2} \right. \\ & - \frac{(x-a)z}{(x-a)^2 + (z+h-c)^2} + \frac{(x+a)z}{(x+a)^2 + (z+h-c)^2} \Big) \\ & + 9 \left(\frac{(x-a)(h+c)}{(x-a)^2 + (z+h+c)^2} - \frac{(x+a)(h+c)}{(x+a)^2 + (z+h+c)^2} \right. \\ & - \frac{(x-a)(h-c)}{(x-a)^2 + (z+h-c)^2} + \frac{(x+a)(h-c)}{(x+a)^2 + (z+h-c)^2} \Big) \\ & - 12 \left(\frac{(x-a)(h+c)(z+h+c)z}{((x-a)^2 + (z+h+c)^2)^2} - \frac{(x+a)(h+c)(z+h+c)z}{((x+a)^2 + (z+h+c)^2)^2} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(x-a)(h-c)(z+h-c)z}{((x-a)^2 + (z+h-c)^2)^2} + \frac{(x+a)(h-c)(z+h-c)z}{((x+a)^2 + (z+h-c)^2)^2} \Bigg] \\
 \sigma_{xz}(x, z) = & \frac{\mu \varepsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \left[-3 \left(\frac{(z-h-c)^2}{(x-a)^2 + (z-h-c)^2} - \frac{(z-h-c)^2}{(x+a)^2 + (z-h-c)^2} \right. \right. \\
 & - \frac{(z-h+c)^2}{(x-a)^2 + (z-h+c)^2} + \frac{(z-h+c)^2}{(x+a)^2 + (z-h+c)^2} \Bigg) \\
 & - (5-4\nu) \left(\frac{z^2}{(x-a)^2 + (z+h+c)^2} - \frac{z^2}{(x+a)^2 + (z+h+c)^2} \right. \\
 & - \frac{z^2}{(x-a)^2 + (z+h-c)^2} + \frac{z^2}{(x+a)^2 + (z+h-c)^2} \Bigg) \\
 & + 4(1+\nu) \left(\frac{z(h+c)}{(x-a)^2 + (z+h+c)^2} - \frac{z(h+c)}{(x+a)^2 + (z+h+c)^2} \right. \\
 & - \frac{z(h-c)}{(x-a)^2 + (z+h-c)^2} + \frac{z(h-c)}{(x+a)^2 + (z+h-c)^2} \Bigg) \\
 & + 3 \left(\frac{(h+c)^2}{(x-a)^2 + (z+h+c)^2} - \frac{(h+c)^2}{(x+a)^2 + (z+h+c)^2} \right. \\
 & - \frac{(h-c)^2}{(x-a)^2 + (z+h-c)^2} + \frac{(h-c)^2}{(x+a)^2 + (z+h-c)^2} \Bigg) \\
 & - 12 \left(\frac{(h+c)(z+h+c)^2 z}{((x-a)^2 + (z+h+c)^2)^2} - \frac{(h+c)(z+h+c)^2 z}{((x+a)^2 + (z+h+c)^2)^2} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(h-c)(z+h-c)^2 z}{((x-a)^2 + (z+h-c)^2)^2} + \frac{(h-c)(z+h-c)^2 z}{((x+a)^2 + (z+h-c)^2)^2} \right) \right] \\
 \sigma_{zz}(x, z) = & -2\mu \varepsilon^p \chi(x, z) \\
 & + \frac{\mu \varepsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \left[4(1-\nu) \left(\arctan \left(\frac{x-a}{z-h-c} \right) - \arctan \left(\frac{x+a}{z-h-c} \right) \right. \right. \\
 & - \arctan \left(\frac{x-a}{z-h+c} \right) + \arctan \left(\frac{x+a}{z-h+c} \right) \Bigg) - 2\nu \left(\arctan \left(\frac{z-h-c}{x-a} \right) \right. \\
 & - \arctan \left(\frac{z-h-c}{x+a} \right) - \arctan \left(\frac{z-h+c}{x-a} \right) + \arctan \left(\frac{z-h+c}{x+a} \right) \Bigg) \\
 & + 4(1-\nu) \left(\arctan \left(\frac{x-a}{z+h+c} \right) - \arctan \left(\frac{x+a}{z+h+c} \right) - \arctan \left(\frac{x-a}{z+h-c} \right) \right. \\
 & + \arctan \left(\frac{x+a}{z+h-c} \right) \Bigg) - 2\nu \left(\arctan \left(\frac{z+h+c}{x-a} \right) - \arctan \left(\frac{z+h+c}{x+a} \right) \right. \\
 & \left. \left. - \arctan \left(\frac{z+h-c}{x-a} \right) + \arctan \left(\frac{z+h-c}{x+a} \right) \right) \right] + 3 \left(\frac{(x-a)(z-h-c)}{(x-a)^2 + (z-h-c)^2} \right.
 \end{aligned} \tag{B.73}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(h-c)(z+h-c)^2 z}{((x-a)^2 + (z+h-c)^2)^2} + \frac{(h-c)(z+h-c)^2 z}{((x+a)^2 + (z+h-c)^2)^2} \Bigg] \\
 \sigma_{zz}(x, z) = & -2\mu \varepsilon^p \chi(x, z) \\
 & + \frac{\mu \varepsilon^p}{4\pi(1-\nu)} \left[4(1-\nu) \left(\arctan \left(\frac{x-a}{z-h-c} \right) - \arctan \left(\frac{x+a}{z-h-c} \right) \right. \right. \\
 & - \arctan \left(\frac{x-a}{z-h+c} \right) + \arctan \left(\frac{x+a}{z-h+c} \right) \Bigg) - 2\nu \left(\arctan \left(\frac{z-h-c}{x-a} \right) \right. \\
 & - \arctan \left(\frac{z-h-c}{x+a} \right) - \arctan \left(\frac{z-h+c}{x-a} \right) + \arctan \left(\frac{z-h+c}{x+a} \right) \Bigg) \\
 & + 4(1-\nu) \left(\arctan \left(\frac{x-a}{z+h+c} \right) - \arctan \left(\frac{x+a}{z+h+c} \right) - \arctan \left(\frac{x-a}{z+h-c} \right) \right. \\
 & + \arctan \left(\frac{x+a}{z+h-c} \right) \Bigg) - 2\nu \left(\arctan \left(\frac{z+h+c}{x-a} \right) - \arctan \left(\frac{z+h+c}{x+a} \right) \right. \\
 & \left. \left. - \arctan \left(\frac{z+h-c}{x-a} \right) + \arctan \left(\frac{z+h-c}{x+a} \right) \right) \right] + 3 \left(\frac{(x-a)(z-h-c)}{(x-a)^2 + (z-h-c)^2} \right.
 \end{aligned} \tag{B.74}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(x+a)(z-h-c)}{(x+a)^2+(z-h-c)^2} - \frac{(x-a)(z-h+c)}{(x-a)^2+(z-h+c)^2} + \frac{(x+a)(z-h+c)}{(x+a)^2+(z-h+c)^2} \Big) \\
 & +3 \left(\frac{(x-a)(h+c)}{(x-a)^2+(z+h+c)^2} - \frac{(x+a)(h+c)}{(x+a)^2+(z+h+c)^2} - \frac{(x-a)(h-c)}{(x-a)^2+(z+h-c)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{(x+a)(h-c)}{(x+a)^2+(z+h-c)^2} \right) \\
 & + (5-4\nu) \left(\frac{(x-a)z}{(x-a)^2+(z+h+c)^2} - \frac{(x+a)z}{(x+a)^2+(z+h+c)^2} \right. \\
 & \left. - \frac{(x-a)z}{(x-a)^2+(z+h-c)^2} + \frac{(x+a)z}{(x+a)^2+(z+h-c)^2} \right) \\
 & + 12 \left(\frac{(x-a)(h+c)(z+h+c)z}{((x-a)^2+(z+h+c)^2)^2} - \frac{(x+a)(h+c)(z+h+c)z}{((x+a)^2+(z+h+c)^2)^2} \right. \\
 & \left. - \frac{(x-a)(h-c)(z+h-c)z}{((x-a)^2+(z+h-c)^2)^2} + \frac{(x+a)(h-c)(z+h-c)z}{((x+a)^2+(z+h-c)^2)^2} \right) \Big] \tag{B.75}
 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] G.Alessandrini - On the identification of the leading coefficient of an elliptic equation *Bolletino U.M.I., Annalisi Funzionale et Appllicazioni*, Serie VI, Vol. IV-C, 1985, p.87-111
- [2] A.Allers, F.Santosa - Stability and resolution analysis of a linearized problem in electric impedance tomography *Inverse Problems*, Vol.7, p.515-533, 1991
- [3] Andrieux S., Ben Abda A. - The reciprocity gap : a general concept for flaw identification problems. Soumis à *Mech. Res. Comm.*, 1993.
- [4] P.Ballard, A.Constantinescu - Sur l'inversion d'un champ des contraintes résiduelles en fonction des contraintes mesurées en surface, *C.R.Acad.Sci.Paris*, t.318, Série II, 1994
- [5] P.Ballard, A.Constantinescu - On the inversion of subsurface residual stresses from surface stress measurments à parraître dans *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1994
- [6] P.K. Banerjee et R. Butterfield - *Boundary element methods in engineering sciences*, McGraw Hill, London, 1981
- [7] I.Beju, E.Soos, P.P.Teodorescu - *Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicatii*, Ed.Tehnica, Bucarest, 1977
- [8] H.Berger, L.Barthe,R.Ohayon - Parametric updating of a F.E. model from experimental modal characteristics *Proc. European Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Aachen, 1989
- [9] K.Bryan, M.Vogelius - A Uniqueness Result Concerning the Identification of a Collection of Cracks from Finetely Many Electrostatic Boundary Measurments *SIAM.J.Appl.Math* Vol.23, No.4, p.990-958, July 1992
- [10] M.Bonnet - *Méthodes des équations intégrales régularisées en élastodynamique tridimensionnelle*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts & Chaussées, Paris, 1986
- [11] M.Bonnet, H.D.Bui, H.Maigre, J.Plancharde - Identification of heat conduction coefficient : application to nondestructive testing In *IUTAM Symposium on Inverse problems in engineering mechanics (11-15 May 1992, Tokyo, Japan)*., ed. M.Tanaka and H.D. Bui, Springer Verlag, 1993.

-
- [12] M.Bonnet, A.Constantinescu - Quelques remarques sur l'identification de modules élastiques à l'aide de mesures sur la frontière, *Actes du 11ème Congrès Français de Mécanique*, Villeneuve d'Ascq, 6-10 sept. 1993 (Presses Universitaires de Lille)
- [13] H.D.Bui - *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*, Editions Eyrolles, Paris, 1993 (traduction anglaise - CRC Press, Boca Raton, 1994 ; traduction japonaise - Shokabo, Tokyo, 1994)
- [14] Bui H.D., Maigre H., Rittel D. - A new approach to the experimental determination of the dynamic stress intensity factor *Int. J. Solids Structures*, **29**(23), pp.2881-2895, 1992.
- [15] H.D. Bui, B. Loret, M. Bonnet - Régularisation des équations intégrales de l'élastodynamique et de l'élastostatique. *C.R. Acad. Sc.*, **t. 300**, 1985
- [16] A.P.Calderon - On an inverse boundary value problem, in Seminar on Numerical analysis and its Application to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro, 1980, pp.65-73
- [17] W. Cheng et I. Finnie - Examination of the computational model for the layer-removal method for residual stress measurement. *Experimental Mechanics*, **26**, p.150-153, 1986
- [18] A.Constantinescu - A Numerical Investigation of the Elastic Moduli in an Inhomogeneous Body dans *Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice* ed. N.Zabarras et al., ASME - I00357, 1993, p. 77
- [19] A.Constantinescu - On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements soumise à *Journal of Inverse Problems in Engineering*, jan.1994
- [20] A.-L.Cauchy Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés des masses continues *Ex. de Math.* 4, p.293-319, 1829
republié dans *Oeuvres Complètes d'Augustin Cauchy*, S.II, t.IX, Gauthier Villars, Paris 1891
- [21] R.Courant, D.Hilbert - *Methods of Mathematical Physics*, Wiley, New York, 1953
- [22] St.C. Cowin, M.Mehrabadi - Eigentensors of Linear Elastic Materials *Q.J.Mech.Appl.Math*, Vol.43, Pt.1, 1990
- [23] St.C. Cowin, M.Mehrabadi - The Structure of the linear anisotropic elastic Symmetries *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.40, No.7, pp.1459-1471, 1992
- [24] D.C.Dobson - Estimates on resolution and stabilisation for the linearized inverse conductivity problem *Inverse Problems*, Vol.8, pp.71-81, 1992
- [25] D.C.Dobson - Convergence of a Reconstruction Method for the Inverse Conductivity Problem *SIAM J.Appl.Math*, Vol.52, No.2, pp.442-458, April 1992

-
- [26] A.Friedmann, M.Vogelius - Identification of Small Inhomogeneities of Extreme Conductivity by Boundary Measurements : a Theorem on Continous Dependence *Arch.Rat.Mech.Anal.*, **105**, pp.299-326
 - [27] Z. Gao et T. Mura - On the inversion of residual stresses from surface displacements. *ASME Journ. Appl. Mech.*, **56**, p.508, 1989
 - [28] A.Hoger - On the determination of residual stress in an elastic body *J.of Elasticity*, 16, p. 303-324, 1986
 - [29] A.Hoger - Residual stress in an elastic body : a theory for small strains and arbitrary rotations *J.of Elasticity*, 31, p. 1-24, 1993
 - [30] A.Hoger - The elasticity tensors of a residually stressed material *J.of Elasticity*, 31, p. 219-237, 1993
 - [31] M.Ikehata - *Inversion for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection* *SIAM J.Appl.Math.*, Vol. 50 , No. 6 , dec. 1990 , p. 1635-1644
 - [32] M.Ikehata - *An Inverse Problem for the Plate in the Love-Kirchhoff Theory* *SIAM J.Appl.Math.*, Vol. 53 , No. 4 , august 1993 , p. 943-970
 - [33] D.G. Gisser, D.Isaakson, J.C.Newell - Electric current computed tomography and eigenvalues *SIAM J.Appl.Math.*, vol.50, no. 6, p.1623-1634, dec. 1990
 - [34] D.G. Gisser, D.Isaakson, J.C.Newell - Current Topics in impedance imaging *Clin.Phys.Physiol.Meas.*, vol.8 suppl. A, p.39-46, 1987
 - [35] D.Isaakson - Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol.MI-5, no. 2, p.91-95, juin 1986
 - [36] K.L. Johnson - *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.
 - [37] Lord Kelvin (W.Thompson) - *Phil.Trans.R.Soc.*, **166**,1856, p. 481
 - [38] Lord Kelvin (W.Thompson) - *Encyclopaedia Britannica* . **7**, 1878, 9. edition, London et Edinburgh
 - [39] R.V.Kohn, A.McKenney - Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography *Inverse problems*, No. 6 , 1990, p. 389-414
 - [40] R.V.Kohn, B.D.Lowe - A variational method for parameter identification *M²AN*, Vol.22, No.1, 1988, p. 119-158
 - [41] R.V.Kohn, M.Vogelius - Determining Conductivity by Boundary Measurments *Comm.Pure.Appl.Math.*, Vol. XXXVII, 1984, p. 289-298
 - [42] R.V.Kohn, M.Vogelius - Determining Conductivity by Boundary Measurments II. Interior Results *Comm.Pure.Appl.Math.*, Vol. XXXVIII, 1985, p. 643-667
 - [43] R.V.Kohn, M.Vogelius - Relaxation of a Variational Method for Impedance Computed Tomography *Comm.Pure.Appl.Math.*, Vol. XL , 1987, p. 745-777

-
- [44] S.Kubo, K.Ohji, K.Konishi - Finite Element Based Inversion Schemes for Estimating Distributions of elastic constants in *Inverse Problems*, Atlanta Technology Publications, Atlanta, 1993
 - [45] V.D.Kupradze, ed. - *Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, North-Holland Series in Applied Mathematics, Vol.25, North-Holland Publishing Co.,1979
 - [46] V.D. Kupradze - *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity et thermoelasticity*. North Hollet, 1979
 - [47] P.Ladevèze, D.Leguillon - Error estimates procedures in the finite element method and applications *SIAM J.Numer.Anal.*, Vol.20, No.3, June 1983
 - [48] P.Ladevèze, M.Reynier, D.Nedjar - Parametric Corrections of Finite Element Models Using Modal Tests *IUTAM Symposium on Inverse problems in engineering mechanics (11-15 May 1992, Tokyo, Japan)*., ed. M.Tanaka and H.D. Bui, Springer Verlag, 1993.
 - [49] J.Lemaitre, J.-L.Chaboche - *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985
 - [50] J.T.Lin, O.Jones - Progress in Impedance Imaging for Gas-Liquid Flows : Experimental Results : Part 1 Analytical and Numerical Developments dans *Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice* ed. N.Zabarras et al., Engineering Foundation,ASME - I00357, 1993, p. 209
 - [51] G. Maeder, J.L. Lebrun, J.M. Sprauel - Present possibilities for the X-ray diffraction method of stress measurement. *NDT International*, **45-5**, p.235-247, 1981
 - [52] C.-S.Man et W.Y.Lu - Towards an acoustoelastic theory for measurment of residual stress *J.of Elasticity*, 17, p.159-182, 1987
 - [53] J.Mandel - *Cours de Mécanique des milieux continus*. I, II, Gauthier-Villars, Paris, 1966
 - [54] R.D. Mindlin - Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, **7**, p.195-202, 1936
 - [55] M.G. Moore et W.P. Evans - Mathematical correction for stress in removed layers in X-ray diffraction reesidual stress analysis. *SAE Trans.*, **66**, p.340-345, 1958
 - [56] T. Mura - *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague/ Boston/London, 1982
 - [57] F.Murat - Contre-exemples pour divers problèmes où le controle intervient dans les coefficients *Ann.Math.Pura e Appl.*, Vol.62, 1977, p. 49-68
 - [58] G.Nakamura, G.Uhlmann - Uniqueness for identifying Lamé moduli by Dirichlet to Neumann map *Inverse Problems in Engineering Sciences - ICM-90 Satellite Conference Proceedings*, ed. M.Yamaguti, Springer Verlag, Tokio 1991

-
- [59] T. Nishimura - On axisymmetric residual stresses in tubes with longitudinally nonuniform stress distribution. *ASME Journ. Appl. Mech.*, **60**, p.300-309, 1993
- [60] Y.H.Pao, W.Sachse, H.Fukuoka - Acoustoelasticity and ultrasonic measurements of residual stresses *Physical Acoustics*, vol.XVII, ed. W.P.Mason et R.N.Thurston, Academic Press, New York, 1984
- [61] P.S. Prevey - The accuracy of X-ray diffraction residual stress measurement. US DOE Rep. EPRI-WS-80-136, p.10.1-10.20, 1981
- [62] M.Raviart - *Résolution des modèles aux dérivées partielles* Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1992
- [63] F.Santosa, M.Vogelius - A Computational Algorithm to Determine Cracks from Electrostatic Boundary Measurements *Int.J.Engng.Sci.*, Vol.29, No.8, p.917-937, 1991,
- [64] F.Santosa, M.Vogelius - A backprojection algorithm for electrical impedance tomography *SIAM J.Appl.Math.*, Vol.50, pp216-243, 1990
- [65] L. Schwartz - *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1965
- [66] I.Y.Shen - Perturbation Eigensolutions of Elastic Structures With Cracks *J.Appl.Mech.(Trans. ASME)* Vol.60, juin 1993, p.438-442
- [67] I.Y.Shen - Vibrations of Elastic Structures With Cracks *J.Appl.Mech.(Trans. ASME)* Vol.60, juin 1993, p.414-420
- [68] H.Shu, L.Ovaciuk, J.T.Lin, O.Jones - Progress in Impedance Imaging for Gas-Liquid Flows : Experimental Results : Part 2 Experimental Results dans *Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice* ed. N.Zabarras et al., Engineering Foundation,ASME - I00357, 1993, p. 209
- [69] Z.Sun, G.Uhlmann - Generic uniqueness for determined inverse problems in 2 dimensions *Inverse Problems in Engineering Sciences - ICM-90 Satellite Conference Proceedings*, ed. M.Yamaguti, Springer Verlag, Tokio 1991
- [70] J.Sylvester - An anisotropic inverse boundary value problem *Comm.Pure.Appl.Math.*, **43**, pp.201-232, 1990
- [71] A.N.Tikhonov, V.Y.Arsenin - *Solutions to ill-posed problems*, Winston-Wiley, New York, 1977
- [72] C.R.Vogel - An overview of numerical methods for nonlinear ill-posed problems, in *Inverse and ill-posed problems*, H.W.Engl and C.W.Groetsch, eds., Academic Press, 1987.
- [73] Wing G.M. - *primer on integral equations of the first kind* SIAM, Philadelphia, 1991
- [74] Yeih W., Koya T., Mura T. - An Inverse Problem in Elasticity With Partially Overprescribed Boundary Conditions (Part I : Theoretical Approach, Part II : Numerical Details), *J.Appl.Mech.(Trans. ASME)*, Vol. 60, Sept.1993, p.595-606

Table des figures

1.1	Mesures d'enfoncement d'un poinçon cylindrique sur l'arrête d'une plaque d'époxy	20
1.2	Forme de la plaque d'époxy	21
1.3	Le difféomorphisme Ψ et les deux corps $\Omega_{\mathbf{C}}$ et $\Omega_{\mathbf{L}}$	24
1.4	Equation $\operatorname{div} a \nabla u = 1$: Convergence des solutions u_N (lignes continues $N = 2, 6$) vers la solution u (en tirets)	31
1.5	Equation $\operatorname{div} a \nabla u = 1$: Non-convergence des paramètres a_N (lignes continues $N = 2, 6$) vers le paramètre a (en tirets)	32
1.6	Elasticité sphère creuse : Convergence des déplacements u_r^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers la solution u_r (en tirets)	33
1.7	Elasticité sphère creuse : Convergence des contraintes σ_{rr}^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers la contrainte σ_{rr} (en tirets)	34
1.8	Elasticité sphère creuse : Convergence du coefficient μ^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers le coefficient μ (en tirets)	35
1.9	Elasticité sphère creuse : Convergence du coefficient λ^N (lignes continues $N = 6, 10$) vers le coefficient λ (en tirets)	36
2.1	Diagramme de Tonti en élasto-statique	40
2.2	La distribution du module de cisaillement G pour le cylindre en torsion	43
2.3	Distribution de l'erreur en loi de comportement pour un cylindre en torsion	44
2.4	Distribution du rapport ELC sur énergie de déformation pour un cylindre en torsion	45
2.5	Inclusion sphérique dans une sphère	52
3.1	Distribution exponentielle réelle et reconstruite du module de Young E (élasticité isotrope : $\delta E_1/E_0 = 0.5, \nu = 0.3 = \text{constant}$)	58
3.2	Formes des inclusions marche (A), carré (B), annulaire (C), et coin (D)	59
3.3	Différents distributions des forces imposées sur la frontière	60

3.4	Reconstruction du module de Young (en haut) et du coefficient de Poisson (en bas) pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 0.5$, $\nu = \text{constant}$, maillage 24×24) après 4 itérations (à gauche) et après 40 itérations à droite	62
3.5	Reconstruction du module de Young (en haut) et du coefficient de Poisson (en bas) pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 0.5$, $\nu = \text{constant}$, maillage 6×6) après 4 itérations (à gauche) et après 40 itérations à droite	63
3.6	Erreur relative du module de Young reconstruit pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 0.5$, $\nu = \text{constant}$, maillage 6×6) avec des mesures sans bruit (en haut) et avec bruit $n = 5\%$ (en bas)	67
3.7	Distribution du module de Young reconstruit pour une inclusion carrée (B) ($\delta E_1/E_0 = 1$, $\nu = \text{constant}$, maillage 6×6) avec des mesures sans bruit (en haut) et avec bruit $n = 5\%$ (en bas)	68
3.8	Distribution reconstruite exponentielle du module de Young ($\delta E_1/E_0 = 0.5$, $\nu = \text{constant}$, maillage 24×24) avec des niveaux de bruit : $n = 1\%$ (à gauche) et $n = 5\%$ (à droite)	69
3.9	Module de Young réel (en haut) et reconstruit après 15 itérations (en bas) pour une inclusion annulaire (C) ($\delta E_1/E_0 = 1$, $\nu = \text{constant}$, maillage 24×24)	69
3.10	Erreur en loi de comportement pour des distributions exponentielles du module de Young avec (en haut) et sans bruit (en bas) ($\delta E_1/E_0 = 0.5$)	70
3.11	Inclusion A (marche) - distribution réelle et reconstruite (11 itérations) du module de cisaillement G	71
3.12	Inclusion A (marche) - distribution reconstruite (11 itérations) du module de cisaillement G	71
3.13	Inclusion A (marche) - distribution réelle et reconstruite (5 itérations) du module de cisaillement G - 5% bruit	72
3.14	Inclusion A (marche) - distribution reconstruite (5 itérations) du module de cisaillement G - 5% bruit	73
3.15	Inclusion B (carre) - distribution réelle et reconstruite (32 itérations) du coefficient de Poisson ν - 0% bruit	74
3.16	Inclusion B (carre) - distribution reconstruite (32 itérations) du coefficient du Poisson ν - 0% bruit	75
3.17	Inclusion B (carre) - distribution réelle et reconstruite (10 itérations) du coefficient de Poisson ν - 0% bruit	76
3.18	Inclusion B (carre) - distribution reconstruite (10 itérations) du coefficient du Poisson ν - 0% bruit	77
3.19	Inclusion C (annulaire) - distribution réelle et reconstruite (32 itérations) du module de cisaillement G	78

3.20	Inclusion C (annulaire) - distribution reconstruite (32 itérations) du module de cisaillement G	79
3.21	Inclusion C (annulaire) - distribution réelle et reconstruite (17 itérations) du module de cisaillement G - 5% bruit	80
3.22	Inclusion C (annulaire) - distribution reconstruite (17 itérations) du module de cisaillement G - 5% bruit	81
3.23	Inclusion D (annulaire) - distribution réelle et reconstruite (14 itérations) du coefficient de Poisson ν - 0% bruit	82
3.24	Inclusion D (échelle) - distribution reconstruite (14 itérations) du coefficient du Poisson ν - 0% bruit	83
3.25	Inclusion D (échelle) - distribution réelle et reconstruite (2 itérations) du coefficient de Poisson ν - 10% bruit	84
3.26	Inclusion D (échelle) - distribution reconstruite (2 itérations) du coefficient du Poisson ν - 10% bruit	85
3.27	Reconstruction d'un conductivité (d'après Kohn et McKenney) : (a) conductivité réelle, (b) reconstruction sans bruit, (c) reconstruction 3% bruit (11 itérations), (d) reconstruction 3% bruit (50 itérations)	87
A.1	Le domaine fissuré Ω_F	98
B.1	L'enlèvement de matière sur un corps de forme quelconque	121
B.2	Inclusion plastique rectangulaire dans un demi-espace élastique	123
B.3	Distributions des contraintes résiduelles selon l'axe z : σ_{xx} (courbe continue), et mesurées σ_{xx}^m (courbe en tirets) pour un demi-espace élastique contenant une inclusion plastique (sans enlèvement (I) et avec enlèvement de matière (II & III))	124
B.4	Deux inclusions rectangulaires dans un demi-espace élastique	125
B.5	Description des trois problèmes dans le cas de la boule	128
B.6	Les trois problèmes dans le cas du demi-espace	129
B.7	Comparaison des contraintes résiduelles calculées (points) avec celles initiales (courbe en tirets) et celles mesurées (courbe continue) selon l'axe z	133
B.8	L'inclusion plastique dans le demi-espace.	141